БЕСѢДЫ

О

МЕХАНИКѢ

В. Л. Кирпичева

заслуженнаго профессора.

Съ 227 фигурами въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданіе К. Л. Риккера

Невскій пр. 14.

1907.

„Русская Скоропечатня", Спб., Екатерин. кан., 94.

Бесѣды эти велись въ небольшемъ кружкѣ и должны были служить введеніемъ къ предположенному членами кружка ряду рефератовъ, посвященныхъ Динамикѣ машинъ. Я рѣшился публиковать ихъ, такъ какъ предполагаю, что онѣ могутъ быть полезны и для болѣе широкаго круга читателей. При этомъ понадобились дополненія и развитіе первоначальнаго содержанія бесѣдъ и вслѣдствіе этого измѣнилась и самая форма изложенія.

Я предполагаю въ читателѣ предварительное знакомство со Статикой твердаго тѣла и Динамикой матеріальной точки. Знаніе этихъ двухъ отдѣловъ механики очень распространено, и я не вижу надобности въ новомъ изложеніи ихъ. Рѣже встрѣчается знакомство съ Динамикой системы, и можетъ быть предлагаемыя бесѣды послужатъ для нѣкоторыхъ читателей побужденіемъ къ тщательному изученію этого наиболѣе интереснаго и важнаго отдѣла механики.

Въ этихъ бесѣдахъ я задался цѣлью изложить только самыя первыя основанія Механики Системы, устраняя всѣ тѣ усложненія, которыя рѣдко встрѣчаются въ приложеніяхъ. Поэтому я не касаюсь вовсе такихъ вопросовъ какъ напримѣръ: случай связей, содержащихъ въ своемъ выраженіи время явнымъ образомъ; случай связей не голономныхъ и т. д.

Стараясь главнымъ образомъ выяснить основные законы науки, ихъ характеръ и значеніе для приложеній, я примѣняю по возможности простые пріемы доказательства. Можетъ быть въ нѣкоторыхъ случаяхъ они не удовлетворяютъ современнымъ высокимъ требованіямъ относительно строгости выводовъ, но за то выигрываютъ въ убѣдительности и гораздо болѣе пригодны для перваго ознакомленія съ основными принципами. Читатели, которыхъ предлагаемое изложеніе не вполнѣ удовлетворитъ, могутъ, послѣ этой книги, служащей введеніемъ въ Динамику, перейти къ изученію болѣе полныхъ сочиненій.

Во многихъ мѣстахъ этой книги я перехожу прямо на почву элементарнаго изложенія. Дѣлаю это съ намѣреніемъ, такъ какъ элементарные, непосредственные пріемы доказательствъ всего лучше способствуютъ полному уясненію.

Примѣры я старался выбирать такіе, которые бы имѣли прикладное значеніе. Необходимымъ условіемъ для всѣхъ примѣровъ поставлено требованіе, чтобы задача могла быть разрѣшена вполнѣ, до конца *).

---

*) Всѣ чертежи для этой книги исполнены А. А. Грабовскимъ, которому долгомъ считаю принести мою глубокую благодарность.

Оглавленіе.

ПЕРВАЯ БЕСѢДА.

Начало Возможныхъ Перемѣщеній.

ВТОРАЯ БЕСѢДА.

Равновѣсіе плоскихъ механизмовъ.

ТРЕТЬЯ БЕСѢДА.

Опредѣленіе силъ связи.

ЧЕТВЕРТАЯ БЕСѢДА.

Даламберово Начало.

Прибавленіе къ четвертой бесѣдѣ.

ПЯТАЯ БЕСѢДА.

Опредѣленіе силъ связи при движеніи.

ШЕСТАЯ БЕСѢДА.

Уравновѣшеніе силъ инерціи.

СЕДЬМАЯ БЕСѢДА.

Теорема о подобіи въ Динамикѣ.

ВОСЬМАЯ БЕСѢДА.

Общія теоремы Динамики. Законъ движенія центра тяжести.

ДЕВЯТАЯ БЕСѢДА.

Общіе законы Динамики. Законъ Количествъ Движенія.

ДЕСЯТАЯ БЕСѢДА.

Общіе Законы Динамики. Законъ Моментовъ Количествъ Движенія.

ОДИНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

Приложенія Закона Моментовъ Количествъ Движенія.

ПЯТНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

ШЕСТНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

Ударъ и мгновенныя силы.

СЕМНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

Динамическія модели (типы, образцы).

ПЕРВАЯ БЕСѢДА.

Начало возможныхъ перемѣщеній.

1. *Что мы называемъ въ Механикѣ системой?* Научное содержаніе Механики и характеръ ея законовъ опредѣлились историческимъ ходомъ ея развитія. Установленіе общихъ законовъ движенія начато Галилеемъ, который разсматривалъ движеніе тяжелыхъ тѣлъ на землѣ. Затѣмъ Ньютонъ широко развилъ ученіе Галилея и примѣнилъ его къ изслѣдованію движенія планетъ вокругъ солнца. Все послѣдующее исходило изъ этихъ двухъ первоначальныхъ геніальныхъ изслѣдованій; результаты ихъ стремились распространить на всевозможные, сложные случаи движенія. Но движеніе тяжелыхъ тѣлъ и планетное движеніе представляютъ въ одномъ отношеніи наиболѣе простые случаи движенія. Мы здѣсь имѣемъ дѣло съ движеніемъ тѣлъ, размѣры которыхъ малы по сравненію съ размѣрами проходимыхъ ими путей и по сравненію съ разстояніями ихъ отъ другихъ тѣлъ. Планеты можно считать точками, движущимися по орбитамъ.

Изъ разсмотрѣнія ихъ движенія получаются первоначально законы движенія матеріальныхъ точекъ. Затѣмъ нужно распространить эти законы на всевозможные случаи и примѣнять при условіяхъ, когда тѣло уже нельзя разсматривать какъ движущуюся точку, когда необходимо разбирать движенія отдѣльныхъ частей тѣла; или когда имѣемъ дѣло не съ однимъ тѣломъ, а съ нѣсколькими, связанными или соединенными между собою, какъ, напр., это имѣетъ мѣсто въ машинѣ и т. д.

Чтобы примѣнить къ этимъ случаямъ то, что найдено для матеріальныхъ точекъ, употребляютъ слѣдующій искусственный пріемъ: каждое тѣло мысленно раздѣляютъ на мелкія части и считаютъ ихъ матеріальными точками. Такимъ образомъ всякое тѣло и любую комбинацію тѣлъ разсматриваютъ, какъ совокупность большаго числа матеріальныхъ точекъ, какъ систему матеріальныхъ точекъ. Для каждой изъ этихъ точекъ движеніе опредѣляется по законамъ, найденнымъ Галлилеемъ и Ньютономъ. Т. е. сложный случай системы тѣлъ приводятъ къ простому случаю матеріальной точки, многократно повторенному.

2. *Сила связи.* Движеніе матеріальной точки опредѣляется тѣми силами, которыя къ ней приложены; напр. для планеты— силами притяженія солнца и другихъ планетъ. Переходя къ системѣ, мы должны, для каждой части ея, т. е. для каждой матеріальной точки, входящей въ составъ системы, ввести дѣйствующія на нее силы, напр., силы тяжести, электрическаго притяженія, и т. д. Въ число этихъ силъ необходимо включить и тѣ силы, которыя получаются вслѣдствіе связи отдѣльныхъ частей системы между собою. Напр., если имѣемъ дѣло съ машиной, въ которой двѣ части взаимно соприкасаются, то, изслѣдуя движеніе одной изъ этихъ частей, нужно ввести давленіе, производимое на нее другою частью; это давленіе будетъ сила связи. Въ машинахъ, состоящихъ изъ большого числа частей, соединенныхъ опредѣленнымъ образомъ, дѣйствуетъ значительное число такихъ силъ связи. Но даже если мы имѣемъ только одно тѣло, то и въ немъ необходимо разсматривать силы связи, а именно, связь между его отдѣльными частями; когда мы мысленно раздѣляемъ тѣло на малыя части, предполагая разсматривать эти части какъ матеріальныя точки, то должны ввести внутреннія силы, которыя представляютъ взаимныя дѣйствія между этими частями. Это тоже силы связи. Если мы примемъ молекулярную гипотезу и будемъ разсматривать тѣла состоящими изъ очень малыхъ частицъ (атомовъ, молекулей), то тогда силами связи будутъ служить взаимныя притяженія и отталкиванія между частицами; эти силы дѣйствуютъ на частицу, которую можно разсматривать какъ матеріальную точку.

3. *Исключеніе силъ связи.* Такимъ образомъ, занимаясь вопросами о движеніи системы, мы имѣемъ дѣло со значительнымъ числомъ силъ связи, которыя почти всегда неизвѣстны и потому очень затрудняютъ рѣшеніе вопроса. Иногда даже число этихъ неизвѣстныхъ должно считаться безконечно большимъ, напр., когда разсматриваемъ взаимныя дѣйствія между безконечно малыми частями тѣла, или когда разбираемъ молекулярныя силы взаимодѣйствія частицъ. Какъ извѣстно, трудности математическаго рѣшенія быстро возростаютъ съ увеличеніемъ числа неизвѣстныхъ. Поэтому въ вопросахъ Механики

Системы прежде всего нужно постараться исключить какъ можно большее число силъ связи; только тогда рѣшеніе становится возможнымъ. Всѣ старанія ученыхъ, разрабатывавшихъ Механику Системы, были направлены на такое исключеніе силъ связи. И всѣ такъ называемые законы Механики Системы въ сущности своей представляютъ результаты болѣе или менѣе успѣшнаго исключенія силъ связи. Цѣнность этихъ законовъ опредѣляется числомъ неизвѣстныхъ силъ связи, которыя исключаются примѣненіемъ того или другого закона. Большее или меньшее число исключаемыхъ силъ связи служитъ мѣриломъ для сравнительной оцѣнки значенія различныхъ законовъ и теоремъ Механики; мы будемъ на всѣ эти теоремы смотрѣть съ такой точки зрѣнія и руководствоваться ею при выборѣ теоремъ и законовъ, которымъ нужно отдавать предпочтеніе въ приложеніяхъ.

Все это прямо вызывается тѣмъ ходомъ мысли, который привелъ къ современной Механикѣ: исходя изъ ученія о движеніи матеріальной точки, примѣнили его къ движенію системы, разсматривая ее, какъ совокупность матеріальныхъ точекъ. При этомъ появляются силы связи, внутреннія силы, и прежде всего нужно исключить возможно большее число ихъ. Такое исключеніе неизвѣстныхъ силъ связи проходитъ красной нитью по всей Механикѣ Системы, составляетъ сущность ея выводовъ *).

4. *Равновѣсіе системъ.* Мы начнемъ съ разсмотрѣнія законовъ равновѣсія системъ, а потомъ перейдемъ къ изученію движенія ихъ. Это вполнѣ естественный путь; нужно начинать съ болѣе простыхъ вопросовъ и, только послѣ рѣшенія ихъ, переходить къ болѣе сложнымъ. Обыкновенно рѣшеніе простыхъ вопросовъ помогаетъ рѣшенію сложныхъ; часто удается рѣшеніе сложнаго вопроса, при помощи нѣкоторыхъ дополненій и измѣненій, свести къ прежде уже полученному рѣшенію болѣе простого вопроса. Именно это и встрѣчается въ Механикѣ; вопросы равновѣсія (законы Статики) значительно проще вопросовъ движенія (законовъ Динамики). Кромѣ того мы увидимъ, что всякая задача движенія можетъ быть сведена на нѣкоторую

*) На это обстоятельство часто не обращаютъ вниманія въ элементарныхъ изложеніяхъ. Тамъ переходъ отъ матеріальной точки къ системѣ производится какъ то незамѣтно; о силахъ связи ничего не упоминаютъ и, вмѣсто законнаго исключенія, происходитъ незаконный, молчаливый пропускъ этихъ силъ. Ихъ обыкновенно оставляютъ безъ вниманія и даже безъ упоминанія, какъ будто бы онѣ вовсе не существовали.

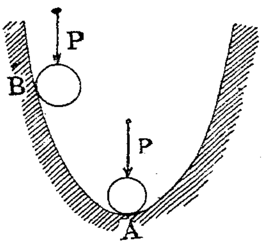
задачу равновѣсія. Несомнѣнно нужно начать со Статики и потомъ только перейти къ Динамикѣ.

Такой ходъ изложенія вполнѣ согласуется съ историческимъ ходомъ постепеннаго развитія науки. Основанія ученія о равновѣсіи были положены еще Аристотелемъ и Архимедомъ, а первые начатки ученія о движеніи матеріальной точки установлены лишь почти двѣ тысячи лѣтъ спустя—Галилеемъ; движеніемъ же системъ начали заниматься еще позже Гюйгенсъ, Ньютонъ и главнымъ образомъ Даламберъ.

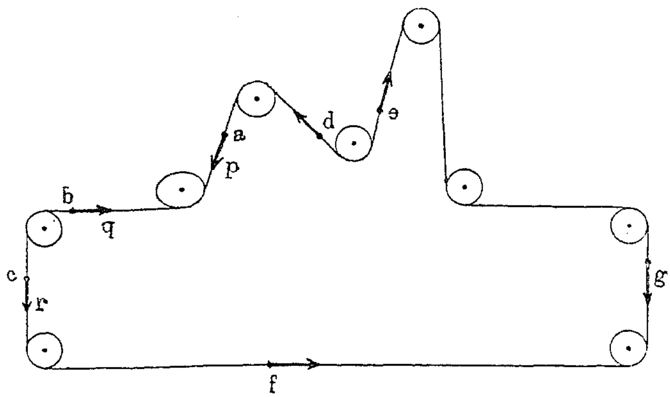
5. ***Возможныя перемѣщенія.*** Мы предполагаемъ, что читатель знакомъ съ простѣйшимъ вопросомъ Статики — съ законами равновѣсія твердаго тѣла, которое разсматривается какъ неизмѣняемая система. Оказывается, что въ этомъ случаѣ достаточно знать силы, приложенныя къ тѣлу (т. е. знать величины, направленія и точки приложенія этихъ силъ). Такихъ данныхъ достаточно для того, чтобы судить о томъ, будетъ ли тѣло находиться въ равновѣсіи или нѣтъ? Въ случаѣ если силы не уравновѣшиваются, можно найти, какія силы должны быть прибавлены для полученія равновѣсія? Такъ же рѣшаются вопросы о равнодѣйствующихъ системахъ силъ, т. е. о группахъ силъ, которыя могутъ замѣнять одна другую безъ нарушенія равновѣсія. Для рѣшенія всѣхъ этихъ вопросовъ нѣтъ надобности знать, какое движеніе получитъ тѣло въ случаѣ, если равновѣсіе его будетъ нарушено, не требуется имѣть никакихъ свѣдѣній о тѣхъ перемѣщеніяхъ, которыя получатъ точки тѣла, въ случаѣ если не будетъ равновѣсія. Во всѣхъ разсужденіяхъ и выводахъ намъ не приходится выходить изъ области явленій равновѣсія, покоя.

Такая полная независимость вопросовъ равновѣсія отъ явленій движенія не встрѣчается при изученіи другихъ системъ, отличныхъ отъ неизмѣняемаго твердаго тѣла, напр., для случая совокупности нѣсколькихъ связанныхъ между собою твердыхъ тѣлъ (образцомъ могутъ служить различные механизмы), или для жидкихъ тѣлъ и. т. п. Здѣсь для сужденія о равновѣсіи необходимо знать: какое перемѣщеніе получится въ случаѣ, если равновѣсіе будетъ нарушено? Условія равновѣсія въ такихъ случаяхъ тѣсно связаны съ этими возможными для системы перемѣщеніями.

Вообразимъ себѣ для примѣра, что разсматриваемъ равновѣсіе шарика, находящагося внутри чашки (фиг. 1) и прикасающагося къ ея поверхности. Здѣсь для шарика возможны различныя перемѣщенія по поверхности чашки. Если шарикъ находится въ точкѣ А, гдѣ для него возможны только горизонтальныя перемѣщенія, то вертикальная сила Р не нарушитъ его равновѣсія. Но въ точкѣ В, гдѣ возможныя перемѣщенія имѣютъ другое направленіе, та же сила Р навѣрное нарушитъ равновѣсіе.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

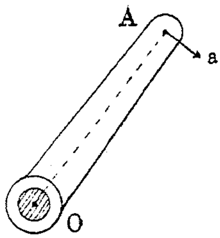
Для другого примѣра возьмемъ слѣдующую систему (фиг. 2): имѣемъ вполнѣ гибкую нерастяжимую нить, огибающую нѣсколько блоковъ. Нить безконечная, т. е. два конца ея сплетены вмѣстѣ. Блоки идеальные, т. е. не дающіе тренія. Пусть въ разныхъ точкахъ нити a, b, c, d, . . . приложены по длинѣ нити силы p, q, r . . ., означенныя на чертежѣ стрѣлками. Въ чемъ состоитъ условіе равновѣсія такой системы?

Для полученія отвѣта на этотъ вопросъ, нужно посмотрѣть, какое перемѣщеніе получитъ наша нить, въ случаѣ нарушенія равновѣсія. Такъ какъ нить нерастяжима, то, очевидно, единственное возможное для нея перемѣщеніе будетъ состоять въ томъ, что всѣ точки нити передвинутся по ея длинѣ на одну и ту же величину. При этомъ нѣкоторыя точки перемѣстятся по направленію силъ, къ нимъ приложенныхъ; другія же точки получатъ перемѣщенія противуположныя направленію силъ, которыя къ нимъ приложены. Это разсмотрѣніе возможныхъ перемѣщеній сейчасъ указываетъ намъ на законъ равновѣсія: необходимо и достаточно, чтобы ариѳметическая сумма тѣхъ силъ, направленія которыхъ совпадаютъ съ направленіемъ перемѣщенія ихъ точекъ приложенія, равнялась суммѣ тѣхъ силъ, направленія которыхъ идутъ противуположно перемѣщеніямъ ихъ точекъ приложенія.

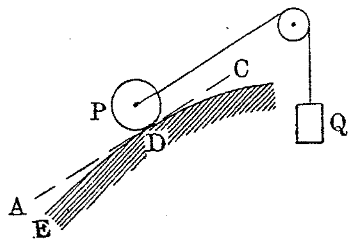
И такъ въ подобныхъ случаяхъ необходимо знать такъ называемыя возможныя перемѣщенія системы, т. е. тѣ небольшія перемѣщенія, которыя получатся какъ только равновѣсіе будетъ нарушено. Эти перемѣщенія опредѣляются, или такъ сказать, назначаются, связями системы.

Машины разнаго рода представляютъ намъ много примѣровъ такихъ возможныхъ перемѣщеній, опредѣляемыхъ связями.

Напр., пусть въ машинѣ какое нибудь тѣло связано съ другими частями такъ, что должно вращаться около неподвижной оси O (фиг. 3); тогда любая точка A этого тѣла должна описы-



Фиг. 3.



Фиг. 3 bis.

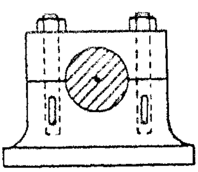
вать кругъ, расположенный въ плоскости, перпендикулярной къ оси O, и имѣющій центръ на оси O. Но для вопросовъ равновѣсія имѣетъ значеніе не весь этотъ кругъ, а только та безконечно малая часть его, которая будетъ описана точкою A, какъ только нарушится равновѣсіе. Это безконечно малое возможное перемѣщеніе точки A (съ точностью до величинъ 2-го порядка) можетъ быть изображено безконечно малымъ прямолинейнымъ отрѣзкомъ Aa, перпендикулярнымъ къ радіусу AO. Оно и должно быть разсматриваемо при изученіи равновѣсія.

Такимъ образомъ, говоря въ Статикѣ о возможныхъ перемѣщеніяхъ, мы подъ этимъ названіемъ подразумѣваемъ не конечныя, а безконечно малыя перемѣщенія. Конечныя перемѣщенія не имѣютъ значенія для вопросовъ равновѣсія. На это не обращали должнаго вниманія при первоначальномъ развитіи Статики, вслѣдствіе чего получались недоразумѣнія и ошибки. Только Декартъ впервые съ ясностью и полной точностью установилъ правильный взглядъ по этому вопросу, устранилъ изъ области Статики разсмотрѣніе конечныхъ перемѣщеній и указалъ, что нужно разсматривать безконечно малыя перемѣщенія. Въ своихъ объясненіяхъ онъ приводитъ слѣдующій примѣръ (фиг. 3 bis): грузъ P., который тянетъ гиря Q, можетъ перемѣщаться по кривой ED. Здѣсь, изучая равновѣсіе, мы должны разсматривать перемѣщенія по касательной ADC, а не по кривой ED.

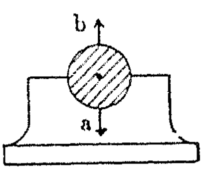
Возможныя перемѣщенія, о которыхъ идетъ рѣчь, въ старинныхъ русскихъ руководствахъ механики назывались дозволяемыми перемѣщеніями. Это очень удачный, характерный терминъ; мы разсматриваемъ тѣ перемѣщенія, которыя дозволяются связями системы. Такія безконечно малыя дозволяемыя перемѣщенія опредѣляютъ условія равновѣсія системы.

6. *Двустороннія и одностороннія связи.* Всякая связь дозволяетъ нѣкоторыя перемѣщенія и препятствуетъ другимъ перемѣщеніямъ. Двухсторонней связью называется связь, удовлетворяющая слѣдующему условію: если она препятствуетъ нѣкоторому перемѣщенію, то навѣрное она препятствуетъ и противуположному перемѣщенію. Напримѣръ, связь двухъ частицъ твердаго тѣла—двухсторонняя: она мѣшаетъ какъ сближенію этихъ частицъ, такъ и ихъ удаленію; иначе говоря, твердое тѣло сопротивляется какъ сжатію, такъ и растяженію. Въ жидкомъ же тѣлѣ почти отсутствуетъ сопротивленіе растяженію, хотя сопротивленіе сжатію значительное. Поэтому связь частицъ въ идеальной жидкости есть односторонняя связь.

Въ машинахъ оси и валы обыкновенно помѣщаются въ подшипники съ крышками, плотно охватывающими шейку вала со всѣхъ сторонъ (фиг. 4); такой подшипникъ представляетъ двустороннюю связь. Подшипникъ безъ крышки (фиг. 5) есть односторонняя связь; она препятствуетъ только перемѣщенію по направленію стрѣлки a; обратному перемѣщенію b эта связь не препятствуетъ. Такіе односторонніе подшипники прежде примѣнялись, напр., для валовъ тяжелыхъ водяныхъ колесъ или вѣтряковъ; вѣсъ вала съ колесомъ препятствовалъ перемѣщенію вверхъ по направленію b, и поэтому валъ не закрывался крышкой. Такое устройство и теперь иногда встрѣчается въ грубыхъ мельничныхъ устройствахъ; сверху вала кладутъ большой кусокъ сала, который служитъ для смазки.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Фигуры 4 и 5 представляютъ примѣры тѣхъ двухъ видовъ связей, которые Рёло въ своей кинематической системѣ называетъ Paarschluss и Kraftschluss. Мы передадимъ эти термины словами: замыканіе крышкой и замыканіе силой. Одно изъ блестящихъ историческихъ обобщеній Рёло состоитъ въ указаніи, что, при постепенномъ усовершенствованіи машинъ, Kraftschluss примѣнялся все рѣже и рѣже и теперь почти окончательно вытѣснился тѣмъ способомъ замыканія, который названъ Paarschluss. Другими словами, въ современныхъ машинахъ примѣняются исключительно двухсторонніе связи; односторонніе же связи совершенно исчезли изъ машиностроенія *).

Это обстоятельство позволяетъ намъ далѣе говорить только о двухстороннихъ связяхъ. Впрочемъ нетрудно, введя небольшія дополненія, распространить слѣдующіе выводы и на случай одностороннихъ связей.

7. *Начало Возможныхъ Перемѣщеній.* Условія равновѣсія для всевозможныхъ системъ выражаются одной общей теоремой или общимъ закономъ, который называется Началомъ Возможныхъ Перемѣщеній. Такая простота и единство закона были замѣчены не сразу; Начало Возможныхъ Перемѣщеній было сначала найдено въ примѣненіи къ нѣкоторымъ простымъ системамъ—рычагу, блокамъ, полиспастамъ и тому подобнымъ машинамъ. Это было сдѣлано еще предшественниками Галилея. Затѣмъ область системъ, для которыхъ справедливо Начало Возможныхъ Перемѣщеній, постепенно расширялась, и наконецъ Иванъ Бернулли установилъ эту теорему, какъ совершенно общій законъ равновѣсія. Мы сначала изложимъ, въ чемъ состоитъ эта теорема, а потомъ перейдемъ къ доказательству ея.

Необходимое и достаточное условіе равновѣсія состоитъ въ томъ, что сумма работъ внѣшнихъ приложенныхъ силъ для каждаго возможнаго перемѣщенія системы должна быть равна нулю. Таково содержаніе этого замѣчательнаго обобщенія, заключающаго въ себѣ всю Статику.

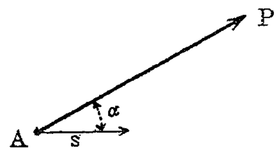
Для правильнаго пониманія этой теоремы нужно сдѣлать нѣкоторыя поясненія. Мы уже указывали, что возможныя перемѣщенія, о которыхъ здѣсь говорится, суть безконечно малыя

*) Въ мостахъ часто встрѣчаются односторонніе связи; напримѣръ конецъ моста положенъ на опору и къ ней не прикрѣпленъ. Здѣсь происходитъ замыканіе силой—значительнымъ вѣсомъ моста. Но и двусторонніе связи также примѣняются въ мостовомъ дѣлѣ, напримѣръ въ консольныхъ мостахъ; конецъ консоли лежитъ на опорѣ, препятствующей ему перемѣщаться внизъ; а для устраненія перемѣщенія вверхъ этотъ конецъ притягивается болтами къ тяжелому фундаменту.

перемѣщенія, дозволяемыя связями системы. Опредѣляя эти перемѣщенія, мы отбрасываемъ величины 2-го порядка, и потому перемѣщенія считаемъ прямолинейными, какъ это было указано въ примѣрѣ, изображенномъ на фиг. 3 bis.

Работа приложенныхъ силъ есть такъ называемая элементарная работа, т. е. произведеніе слѣдующихъ трехъ величинъ (фиг. 6): a) силы P; b) перемѣщенія s. c) косинуса угла между силой и перемѣщеніемъ

$$P.\ s.\ \cos\alpha$$



Фиг. 6.

Иначе можно опредѣлить эту работу какъ произведеніе двухъ величинъ:

$$P \text{ и } s.\ \cos\alpha$$

т. е., силы P и проекціи перемѣщенія на направленіе силы.

Выражая Начало Возможныхъ Перемѣщеній въ вышеуказанной формѣ, мы предполагаемъ, что всѣ связи идеальныя, не представляющія тренія и тому подобныхъ сопротивленій. Такія связи не оказываютъ никакого препятствія возможнымъ перемѣщеніямъ. Поэтому въ нашей теоремѣ говорится только о внѣшнихъ приложенныхъ силахъ и умалчивается о силахъ связи.

Если впослѣдствіи пожелаемъ разсматривать треніе въ соединеніяхъ частей, то нужно будетъ силу тренія считать одной изъ внѣшнихъ приложенныхъ силъ и присоединить ее къ остальнымъ внѣшнимъ силамъ. Также нужно присоединить къ нимъ и силы вязкости, силы упругости и т. д., если онѣ дѣйствуютъ.

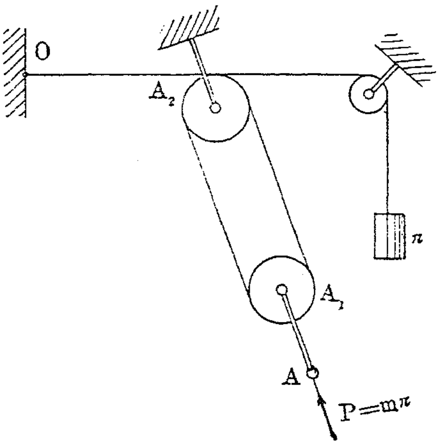
8. ***Доказательство Начала Возможныхъ Перемѣщеній.*** Положимъ, что всѣ внѣшнія силы, приложенныя къ системѣ

$$P,\ Q,\ R,\ \ldots,$$

имѣютъ общую мѣру π, которая содержится m разъ въ силѣ P, n разъ въ силѣ Q и т. д. Доказавъ нашу теорему для этого случая, мы безъ труда распространимъ ее и на случай, когда внѣшнія силы несоизмѣримы между собою, т. е. не имѣютъ общей мѣры; это распространеніе сдѣлается помощью обыкновенныхъ математическихъ пріемовъ для перехода отъ величинъ соизмѣримыхъ къ величинамъ несоизмѣримымъ.

Всѣ наши внѣшнія силы могутъ быть получены или воспроизведены помощью одной силы π, повторенной нѣсколько разъ.

Фактически можно получить ихъ помощію одного груза равнаго π, пользуясь извѣстнымъ механизмомъ, называемымъ полиспастомъ. Чтобы получить силу P, приложенную въ точкѣ A (фиг. 7), поступимъ слѣдующимъ образомъ: расположимъ обойму съ подвижными блоками A_1 и обойму съ неподвижными блоками A_2 по направленію силы P; A_2 прикрѣпимъ къ неподвижному предмету а помощію подвижной обоймы блока A_1 захватимъ точку A. Затѣмъ оснастимъ этотъ полиспастъ гибкой веревкой; одинъ конецъ ея прикрѣпимъ къ неподвижной точкѣ O, обведемъ веревку черезъ блоки A_1, A_2 такъ что между ними будетъ m вѣтвей веревки; наконецъ проведемъ веревку черезъ отводной блокъ и на концѣ ея повѣсимъ грузъ π. Если веревка вполнѣ гибкая и если въ блокахъ вовсе нѣтъ тренія, то на точку A будетъ дѣйствовать сила равная m разъ π, т. е. заданная сила P.



Фиг. 7.

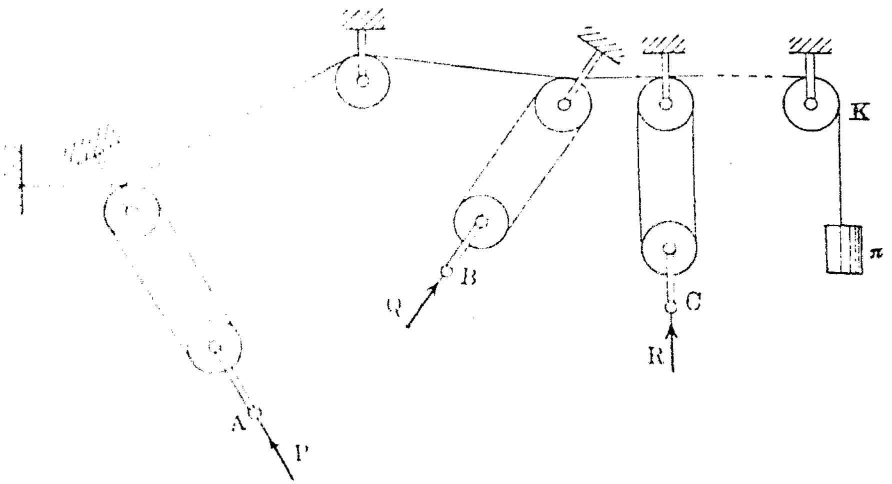
Такимъ же образомъ можемъ получить и остальныя силы Q, R, при чемъ для полученія всѣхъ ихъ можно воспользоваться однимъ грузомъ π и одной веревкой; нужно послѣдовательно оснастить этой веревкой полиспасты, соединенные съ точками A, B, C. . . , гдѣ приложены эти силы, переходя отъ одной точки къ другой при помощи неподвижныхъ отводныхъ блоковъ, какъ это показано на фиг. 8. Окончивъ оснастку блоковъ, соединенныхъ со всѣми точками приложенія внѣшнихъ силъ, проведемъ веревку черезъ отводной блокъ K и на концѣ ея повѣсимъ грузъ π. Дѣйствіемъ его будутъ вызваны всѣ внѣшнія силы

$$P, Q, R, \ldots,$$

приложенныя къ системѣ; онъ одинъ замѣняетъ ихъ всѣхъ, изображаетъ всю совокупность внѣшнихъ дѣйствій на систему, которыя стремятся вывести ее изъ равновѣсія.

Будемъ мысленно наблюдать за этимъ грузомъ; это наблюденіе дастъ намъ возможность вывести условія равновѣсія нашей системы.

Перепробуемъ мысленно различныя возможныя перемѣщенія точекъ нашей системы. Пусть окажется, что при одномъ изъ нихъ грузъ π опускается. Тогда мы можемъ съ увѣренностью утверждать, что наша система не находится въ равновѣсіи. На самомъ дѣлѣ всѣ внѣшнія силы замѣнены грузомъ π, который стремится опуститься; у насъ оказалось, что есть такое возможное перемѣщеніе, при которомъ грузъ понижается. Но связи



Фиг. 8.

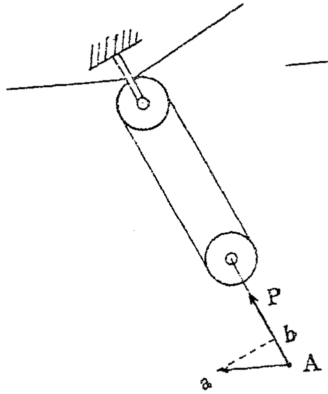
идеальныя, т. е. не представляютъ никакого препятствія возможнымъ перемѣщеніямъ. Очевидно, при такихъ условіяхъ получится пониженіе груза π, т. е. получится движеніе, и равновѣсіе будетъ нарушено.

Предположимъ теперь противуположный случай, т. е. что, пробуя мысленно различныя возможныя перемѣщенія нашей системы, мы встрѣчаемъ въ числѣ ихъ такое, при которомъ грузъ π подымается. Такъ какъ у насъ связи двустороннія, то возможно и перемѣщеніе прямо противуположное; а при немъ очевидно грузъ π будетъ опускаться; слѣд. навѣрное есть такое перемѣщеніе, при которомъ грузъ π опускается и неизбѣжно равновѣсіе будетъ нарушено.

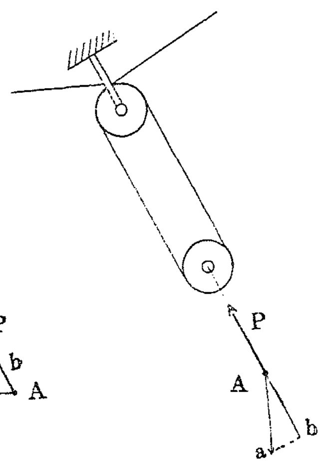
И такъ если пробы намъ покажутъ, что есть возможныя перемѣщенія, при которыхъ грузъ π или подымается или опускается, то мы заключаемъ, что система не находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ.

Но если, перепробовавъ всѣ возможныя перемѣщенія, мы увидимъ, что при всѣхъ ихъ нашъ грузъ π не поднимается и не опускается, а остается на прежней высотѣ, то мы должны заключить, что заданная совокупность силъ уравновѣшивается на нашей системѣ. Это слѣдуетъ изъ того, что совокупность внѣшнихъ силъ замѣняется однимъ грузомъ π; стоитъ только первоначально уничтожить въ немъ всякую скорость и онъ не вызоветъ никакого движенія, такъ какъ нѣтъ ни одного возможнаго перемѣщенія, при которомъ этотъ грузъ опускается.

9. Выразимъ математическимъ языкомъ то, что доказано въ предъидущемъ n⁰. Для этого посмотримъ, какъ выражается опусканіе нашего груза π въ зависимости отъ внѣшнихъ силъ и возможныхъ перемѣщеній системы. Разсмотримъ одну изъ точекъ системы: напр. A, къ которой приложена внѣшняя сила P (фиг. 9). Пусть возможное перемѣщеніе точки A будетъ Aa;



Фиг. 9.



Фиг. 10.

оно не должно непремѣнно совпадать съ направленіемъ внѣшней силы P, такъ какъ это перемѣщеніе опредѣляется связями системы. При передвиженіи точки A въ a, разстояніе между блоками увеличится, и, съ точностью до величинъ 2-го порядка, это увеличеніе представится длиной Ab, т. е. проекціей перемѣщенія Aa на направленіе силы P; эту проекцію назовемъ буквою p. При нашемъ перемѣщеніи разстояніе блоковъ уменьшается на p, и если между блоками веревка проходитъ n разъ, то полная длина веревки, оснащающей эти блоки, уменьшится на

$$n. \ p.$$

Слѣдствіемъ этого перемѣщенія будетъ то, что грузъ π, повѣшенный на концѣ веревки, опустится на высоту

$$n. \ p.$$

Здѣсь проекція Ab совпадаетъ съ направленіемъ силы P, и мы считаемъ ее положительной. Въ случаѣ, представленномъ на фиг. 10, проекція $Ab = p$ идетъ противуположно силѣ P, и мы будемъ считать ее отрицательной. Тогда результатомъ перемѣщенія будетъ увеличеніе разстоянія между блоками, и на оснастку ихъ понадобится длина веревки большая прежней, т. е. при этомъ грузъ π поднимается. Для обоихъ случаевъ (фиг. 9 и фиг. 10) можно формально писать, что происходитъ опусканіе груза на величину

$$n\,p,$$

но въ случаѣ фиг. 9 величина p положительная, т. е. дѣйствительно происходитъ опусканіе груза, а въ случаѣ фиг. 10 величина проекціи p отрицательная, т. е. получается отрицательное опусканіе, слѣд. подъемъ груза.

Разсматривая всѣ точки приложенія силъ

$$P, Q, R, \ldots$$

и называя проекціи перемѣщеній на направленія этихъ силъ черезъ

$$p, q, r \ldots,$$

а число вѣтвей веревки, оснащивающихъ соотвѣтствующіе блоки черезъ

$$n, m, \ldots,$$

получимъ, что результатомъ перемѣщенія всѣхъ точекъ системы будетъ опусканіе груза π на величину суммы:

$$np + mq + \ldots$$

Если такая сумма окажется не равной нулю, то это означаетъ, что равновѣсіе не существуетъ. Условіе, необходимое и достаточное для равновѣсія, заключается въ томъ, что опусканіе груза π должно быть равно нулю для каждаго возможнаго перемѣщенія, т. е. должно быть

$$np + mq + \ldots = 0$$

Умножая на π, получимъ

$$n\pi.p + m\pi.q + \ldots = 0$$

Но такъ какъ

$$n\pi = P,\ m\pi = Q\ .\ .\ .\ ,$$

то имѣемъ условіе

$$Pp + Qq + \ .\ .\ . = 0$$

Здѣсь каждая внѣшняя сила умножается на проекцію перемѣщенія; такое произведеніе есть работа силы для перемѣщенія, поэтому наше условіе заключается въ томъ, что сумма работъ внѣшнихъ силъ для возможныхъ перемѣщеній точекъ ихъ приложенія должна быть равна нулю. А въ этомъ и заключается Начало Возможныхъ Перемѣщеній, содержаніе котораго мы уже излагали, и которое такимъ образомъ доказано предъидущими разсужденіями.

10. ***Нѣсколько замѣчаній по поводу этого доказательства.*** Изложенный пріемъ доказательства Начала Возможныхъ Перемѣщеній принадлежитъ Лагранжу. Я считаю это доказательство наилучшимъ и наиболѣе убѣдительнымъ изъ всѣхъ предложенныхъ доказательствъ Начала Возможныхъ Перемѣщеній; сущность самаго закона, значеніе возможныхъ перемѣщеній для равновѣсія, исключеніе при этомъ всѣхъ силъ связи, о которыхъ даже не упоминается во время доказательства—всѣ эти основныя черты Начала съ полною ясностью выступаютъ во время доказательства. Также совершенно опредѣленно видно, какъ нужно прилагать это общее Начало къ частнымъ вопросамъ.

Но я долженъ при этомъ упомянуть, что, высказывая такое мнѣніе о Лагранжевомъ доказательствѣ, я вхожу въ противорѣчіе съ большинствомъ современныхъ писателей о Механикѣ. Обыкновенно упрекаютъ это доказательство въ недостаткѣ строгости и даже иногда называютъ разсужденія Лагранжа не доказательствомъ, а иллюстраціей Начала Возможныхъ Перемѣщеній. Но даже и противники разсужденій Лагранжа признаютъ геніальность его соображеній, находятъ ихъ очень полезными для выясненія Начала. „Это кажущееся доказательство, но въ высшей степени освѣщающее вопросъ", говоритъ одинъ современный математикъ *).

Мнѣ пришлось бы далеко уклониться отъ предмета Бесѣдъ, если бы я занялся подробной критикой такихъ мнѣній; понадобилось бы разобрать вопросъ о степени убѣдительности доказа-

*) „C'est un semblant de preuve, mais combien lumineux". Picard. La Science moderne, p. 104.

тельствъ и многіе другіе общіе вопросы научнаго пониманія. Въ началѣ каждой науки необходимо поставить нѣкоторыя положенія или допущенія, иначе говоря, постулаты или аксіомы. Здѣсь важенъ выборъ этихъ постулатовъ; нужно подбирать такіе, которые скорѣе всего будутъ приняты умомъ, на которые онъ согласится съ наибольшею готовностью. Съ этой точки зрѣнія можно даже не вступать въ споръ относительно строгости Лагранжева доказательства. Предоставимъ лицамъ, возражающимъ противъ него, считать разсужденія Лагранжа не доказательствомъ, а постулатомъ. Но по крайней мѣрѣ нужно сознаться, что это постулатъ естественный и легко пріемлемый умомъ. Пикаръ, котораго мы выше цитировали, говоритъ: „въ этомъ доказательствѣ пользуются нашимъ инстинктивнымъ знаніемъ касательно пониженія центра тяжести“, и далѣе поясняетъ свою мысль, прибавляя: „было бы ошибкой слишкомъ недовѣряться этимъ инстинктивнымъ знаніямъ, которыя очень часто представляютъ резюме длиннаго ряда наблюденій“.

Такъ говорятъ даже противники доказательства Лагранжа. Мы же укажемъ, что если выбирать для начала Механики наиболѣе пріемлемый постулатъ и сравнивать, напр., законъ параллелограмма силъ и Начало Возможныхъ Перемѣщеній, то конечно нужно отдать предпочтеніе второму, какъ болѣе пріемлемому умомъ.

Прибавимъ къ этому, что когда Начало Возможныхъ Перемѣщеній установлено (т. е. или доказано, или принято въ качествѣ постулата), то изъ него можно уже строго вывести всѣ остальные законы равновѣсія, а въ числѣ ихъ и Параллелограммъ Силъ. На возможность этимъ путемъ доказывать Законъ Параллелограмма указываетъ Пуассонъ въ своемъ Traité de Mécanique.

11. *Другія доказательства Начала Возможныхъ Перемѣщеній.* Существуетъ совершенно другой пріемъ доказательства; при немъ исходятъ изъ законовъ равновѣсія силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, т. е. въ сущности изъ закона параллелограмма силъ. Зная равновѣсіе точки, переходятъ къ равновѣсію системы, какъ совокупности точекъ. Можно отдѣлить другъ отъ друга точки, составляющія систему, т. е. мысленно уничтожить связи системы и замѣнить ихъ силами связи, внутренними силами. Тогда можно разсматривать каждую точку отдѣльно. Для равновѣсія точки необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ была

равна нулю. Но тогда и работа этой равнодѣйствующей, для возможнаго перемѣщенія той же точки, будетъ равна нулю. А работа равнодѣйствующей равна суммѣ работъ составляющихъ, слѣд. эта послѣдняя сумма тоже равна нулю.

Напишемъ такія уравненія для всѣхъ точекъ системы и затѣмъ исключимъ изъ нихъ силы связи. Тогда получимъ законъ равновѣсія, въ который не входятъ силы связи. Если при такомъ исключеніи получимъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній, то очевидно оно этимъ и будетъ доказано.

Но, чтобы исключить силы связи, нужно хотя что нибудь знать о нихъ. Необходимо сказать, въ чемъ состоитъ связь двухъ точекъ, нужно опредѣлить, описать ее, и тогда исключеніе возможно. Поэтому указанный пріемъ вывода возможенъ только для связей опредѣленнаго рода, а не вообще.

Въ большомъ числѣ случаевъ связи можно подвести подъ слѣдующіе типы: a) разстояніе между двумя точками неизмѣняется; b) какая нибудь точка системы принуждена при своихъ перемѣщеніяхъ оставаться на опредѣленной поверхности (на шарѣ, на плоскости и т. д.); c) два тѣла, входящія въ составъ системы, должны непремѣнно прикасаться между собою. Для этихъ типовъ исключеніе силъ связи дѣлается безъ труда, и въ результатѣ получается Начало Возможныхъ Перемѣщеній.

Подобнымъ путемъ доказали Начало Возможныхъ Перемѣщеній Фурье, Пуассонъ, а за ними повторено то же доказательство въ большинствѣ руководствъ по Механикѣ.

12. ***Еще пріемъ доказательства.*** Доказательство, о которомъ говорится въ предъидущемъ n^0, предполагаетъ извѣстнымъ законъ равновѣсія силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ.

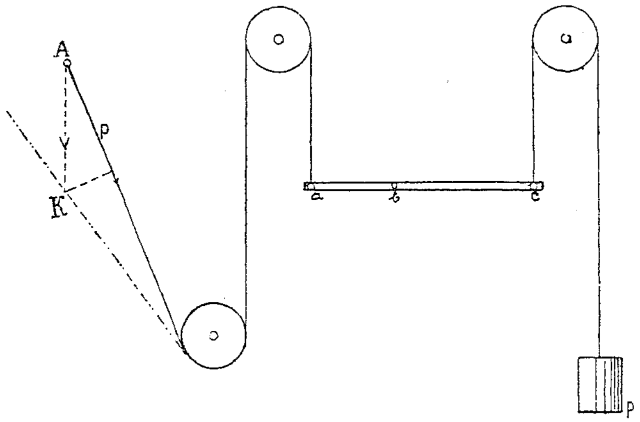
Можно также доказать Начало Возможныхъ Перемѣщеній, принимая за основаніе какой либо другой частный законъ равновѣсія. Положимъ, напр., что намъ извѣстенъ законъ рычага; пусть онъ доказанъ какимъ либо способомъ, напр., однимъ изъ пріемовъ, примѣняемыхъ въ Статикѣ твердаго тѣла. Принимая этотъ законъ, мы помощію его можемъ доказать Начало Возможныхъ Перемѣщеній для любой системы.

Такимъ путемъ идетъ Фурье въ одномъ изъ своихъ доказательствъ *).

---

*) См. Mémoire sur la Statique, въ собраніи сочиненій Фурье. Oeuvres de Fourier. T. II, p. 477. Это самая первая печатная работа Фурье (1798 г.) и единственный его мемуаръ, относящійся къ области Механики.

Фурье прежде всего замѣняетъ всѣ внѣшнія силы P, Q, R, . . . дѣйствующія въ системѣ, грузами p, q, r . . ., примѣняя для этого механизмъ, изображенный на фиг. 10 bis. Длины плечъ рычага abc подбираются такія, чтобы возможныя перемѣщенія всѣхъ грузовъ p, q, r, . . . были одинаковы по величинѣ. При рычажныхъ преобразованіяхъ силы измѣняются обратно пропорціонально плечамъ, а возможныя перемѣщенія измѣняются прямо пропорціонально плечамъ. Слѣд. при такихъ преобразованіяхъ



Фиг. 10 bis.

работа для возможнаго перемѣщенія остается безъ измѣненія. А такъ какъ перемѣщенія для всѣхъ грузовъ p, q, r . . . одинаковы, то эти грузы пропорціональны возможнымъ работамъ силъ.

Нѣкоторыя силы P, Q, R . . . даютъ положительную работу; отвѣчающіе имъ грузы p, q, r . . . опускаются при возможныхъ перемѣщеніяхъ. Другія силы P′, Q′, R′ . . . даютъ отрицательную работу, а соотвѣтствующіе имъ грузы p′, q′, r′. . . поднимаются. Величина опусканія грузовъ первой группы такая же, какъ величина поднятія грузовъ второй группы.

Всегда можно расположить рычаги и отводные блоки механизма такимъ образомъ, что всѣ опускающіеся грузы p, q, r . . ., придутся въ одной точкѣ. Тогда можно замѣнить совокупность этихъ грузовъ однимъ, равнымъ ихъ суммѣ; его назовемъ П.

Тоже можно сдѣлать и для всѣхъ опускающихся грузовъ, которые всѣ замѣнятся однимъ П′, равнымъ ихъ суммѣ. Нетрудно достигнуть того, что грузы П и П′ будутъ расположены на одномъ уровнѣ. Тогда мы ихъ соединимъ помощію горизонтальнаго рычага, точку опоры котораго необходимо расположить по срединѣ его длины, такъ какъ повышеніе одного конца равно пониженію другого конца.

Теперь равновѣсіе всей нашей системы приводится къ равновѣсію послѣдняго горизонтальнаго рычага. Но онъ равноплечій, слѣд. грузы П и П′ должны быть равны между собою, или иначе

$$П - П' = 0$$

Умножимъ обѣ части равенства на величину возможнаго перемѣщенія s, одинаковаго для всѣхъ грузовъ p, q, .. p′, q′ ..; кромѣ того замѣнимъ П и П′ соотвѣтствующими суммами отдѣльныхъ грузовъ. Тогда предъидущее уравненіе получаетъ видъ:

$$(p+q+r+\ldots)\,s - (p'+q'+r'+\ldots)\,s = 0$$

Очевидно, оно выражаетъ собою Начало Возможныхъ Перемѣщеній.

Это доказательство интересно, какъ указатель тѣсной связи нашего Начала съ машинами и механизмами разнаго рода. Само Начало Возможныхъ Перемѣщеній выросло на почвѣ изученія машинъ, и слѣды этого происхожденія видны во многихъ доказательствахъ Начала.

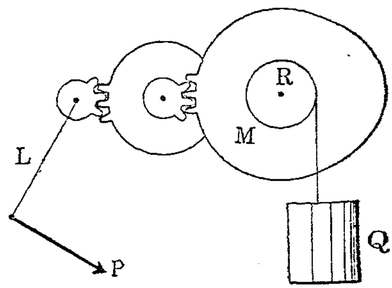
13. Въ заключеніе приведемъ еще одно соображеніе, убѣждающее насъ въ справедливости Начала Возможныхъ Перемѣщеній. Противурѣчіе съ этимъ Началомъ неминуемо повлечетъ за собою противурѣчіе Закону Сохраненія Энергіи. А такъ какъ изученіе явленій природы установило въ насъ твердое убѣжденіе въ общности Закона Сохраненія Энергіи, то слѣдовательно получается, хотя не прямое, но тѣмъ не менѣе вполнѣ убѣдительное, подтвержденіе Начала Возможныхъ Перемѣщеній. Этимъ путемъ идутъ лордъ Келвинъ и Тэтъ въ своемъ замѣчательномъ сочиненіи по Теоретической Физикѣ; они выводятъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній, какъ слѣдствіе Начала Сохраненія Энергіи *).

14. ***Приложенія Начала Возможныхъ Перемѣщеній.*** Прикладывая его къ частнымъ случаямъ, нужно прежде всего

*) „Можно считать, что это принципъ (Начало Сохраненія Энергіи) заключаетъ въ себѣ всю отвлеченную динамику, такъ какъ мы далѣе покажемъ, что условія равновѣсія и движенія, во всѣхъ возможныхъ случаяхъ, могутъ быть непосредственно выведены изъ него“. См. Lord Kelvin and P. G. Tait. Treatise on Natural Philosophy. Part I, p. 265.

помнить, что эта теорема исключаетъ всѣ силы связи, и ни одна изъ силъ связи не должна фигурировать въ разсмотрѣніи; мы можемъ совершенно игнорировать связи.

Для примѣра разсмотримъ подъемный механизмъ (фиг. 11), въ которомъ сила P вращаетъ рукоятку L; затѣмъ, помощію системы зубчатыхъ колесъ, движеніе передается барабану M, на который навивается веревка, поднимающая грузъ Q. Здѣсь мы имѣемъ много силъ связи: всѣ давленія между зубцами колесъ, давленія опоръ на оси этихъ колесъ и т. д., все это силы связи. Мы должны совершенно пропустить ихъ, и разсматривать только двѣ внѣшнія силы P и Q. Условіе равновѣсія между ними получится, разсматривая безконечно малыя возможныя перемѣщенія точекъ приложенія этихъ силъ. Пусть рукоятка L повернется на безк. малый уголъ ω, тогда точка приложенія силы P пройдетъ по направленію силы путь $L.\omega$, и работа силы P будетъ



Фиг. 11.

$$P.L.\omega.$$

При поворачиваніи рукоятки на уголъ ω, барабанъ повернется на значительно меньшій уголъ, такъ какъ между ними поставлена система зубчатыхъ колесъ, замедляющая вращеніе. Пусть замедленіе происходитъ въ k разъ (k—называется передаточнымъ числомъ зубчатаго механизма). Тогда уголъ поворота барабана будетъ

$$\frac{\omega}{k}.$$

Если радіусъ барабана есть R, то путь, пройденный точкой приложенія груза Q, окажется

$$R.\frac{\omega}{k}$$

и работа силы Q для возможнаго перемѣщенія равна

$$-Q.\,R.\frac{\omega}{k}.$$

Здѣсь взятъ знакъ минусъ, потому что перемѣщеніе идетъ прямо противуположно силѣ.

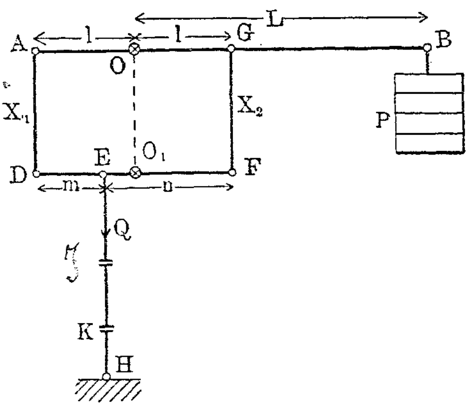
Примѣняя Начало Возможныхъ Перемѣщеній, мы должны написать, что сумма работъ внѣшнихъ силъ равна нулю, т. е.

$$P.\ L.\ \omega - Q.\ R.\frac{\omega}{k} = 0;$$

откуда получаемъ условіе равновѣсія:

$$P = Q.\frac{1}{k}\frac{R}{L}.$$

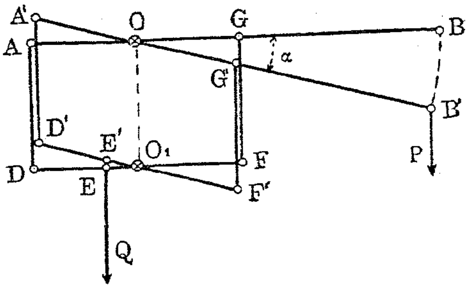
15. Для другого примѣра возьмемъ дифференціальный рычагъ. Этотъ механизмъ, примѣняемый въ сотенныхъ вѣсахъ и въ машинахъ, служащихъ для испытанія прочности металловъ, состоитъ въ слѣдующемъ (фиг. 12): два рычага AOB и DEF соединены между собою шарнерными тягами AD и GF. Первый изъ нихъ имѣетъ неподвижную ось вращенія O; короткія плечи его AO и GO равны между собою; на концѣ длиннаго плеча OB дѣйствуетъ грузъ P. Другой рычагъ, подвѣшенный къ первому на тягахъ, неравноплечій, а именно плечо EF больше плеча ED. Въ точкѣ E приложена сила Q, которую уравновѣшиваетъ сила P. Напр., если имѣемъ машину для разрыва металлическихъ брусковъ, то испытываемый брусокъ IK верхнимъ концомъ прикрѣпляется къ стержню EI, а нижнимъ къ неподвижной точкѣ H. Q будетъ сила, растягивающая брусокъ IK, когда на концѣ большого рычага повѣшенъ грузъ P.



Фиг. 12.

Въ этой машинѣ всѣ давленія въ шарнерахъ, а также силы X_1, X_2, которыя появятся вдоль тягъ AD и GF, связывающихъ два рычага, представляютъ силы связи, и поэтому исключаются изъ разсмотрѣнія. Остаются только двѣ внѣшнія силы P и Q. Разсмотримъ безконечно малое перемѣщеніе, допускаемое связями системы. Оно будетъ состоять (фиг. 13) въ наклоненіи рычаговъ AOB и DEF на нѣкоторый безконечно малый уголъ α, причемъ прямоугольникъ ADFG превратится въ параллелограммъ.

Перемѣщеніе точки приложенія силы P будетъ BB' и оно совпадаетъ съ направленіемъ силы; а перемѣщеніе точки E, гдѣ приложена сила Q, идетъ прямо противуположно направленію силы Q и равно EE'. И такъ по Началу Возможныхъ Перемѣщеній имѣемъ слѣдующее условіе равновѣсія.



Фиг. 13.

$$P.\,BB' - Q.\,EE' = 0 \text{ или } \frac{Q}{P} = \frac{BB'}{EE'}$$

Но такъ какъ оба рычага наклонились на одинъ и тотъ же уголъ α, то отношеніе перемѣщеній BB' и EE' равно отношенію плечъ OB и O_1E, слѣд.

$$\frac{Q}{P} = \frac{OB}{O_1E}$$

Плечо OB названо нами L; что же касается плеча O_1E, то изъ чертежа видно, что

$$O_1E = O_1D - ED = O_1D - m$$

$$O_1D = \frac{DF}{2} = \frac{DE + EF}{2} = \frac{m + n}{2}$$

Слѣдовательно

$$O_1E = \frac{m+n}{2} - m = \frac{n-m}{2}$$

Поэтому условіе равновѣсія получаетъ такой видъ:

$$\frac{Q}{P} = \frac{2\,L}{n - m}$$

Дѣлая разность $n - m$ очень малой, мы можемъ получить очень значительную величину отношенія $\frac{Q}{P}$, и для этого вовсе не потребуется большая длина L. Въ этомъ заключается удобство этого механизма; мы получаемъ громадное увеличеніе силы, примѣняя рычаги небольшой длины.

Названіе дифференціальный рычагъ дано этому механизму вслѣдствіе того, что въ формулу равновѣсія силъ на немъ входитъ разность плечъ рычага DEF

$$n - m.$$

16. *Третій примѣръ. Мостовые вѣсы.* Начало Возможныхъ Перемѣщеній очень хорошо освѣщаетъ вопросъ о кон-

струкціи мостовыхъ вѣсовъ. Такія вѣсы не должны измѣнять свое показаніе при передвиженіи взвѣшиваемаго груза въ разныя точки платформы вѣсовъ; гдѣ бы ни былъ помѣщенъ грузъ на этой платформѣ, показаніе вѣсовъ, т. е. вѣсъ гирь, уравновѣшивающихъ этотъ грузъ, должно оставаться безъ измѣненія. Но въ уравненіяхъ равновѣсія каждая внѣшняя сила даетъ слагаемое, состоящее изъ произведенія этой силы на проекцію перемѣщенія точки приложенія силы. Проекція эта должна быть взята на направленіе самой силы; такъ какъ грузъ есть вертикальная сила, то мы должны брать вертикальную проекцію перемѣщенія.

Такое произведеніе груза на вертикальную проекцію его перемѣщенія не должно измѣняться при передвиженіи груза изъ одной точки платформы въ другую. А для этого необходимо должно быть, чтобы вертикальныя перемѣщенія всѣхъ точекъ платформы были одинаковы. Другими словами, возможное перемѣщеніе платформы должно быть поступательное; въ этомъ заключается общее правило устройства мостовыхъ вѣсовъ. Если оно выполнено, т. е. если связи механизма вѣсовъ обезпечиваютъ платформѣ вертикальное поступательное движеніе, или, какъ иногда его называютъ „параллельное движеніе“ то вѣсы устроены правильно.

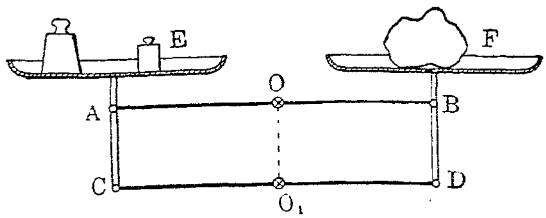
Это условіе можно выполнить множествомъ различныхъ способовъ, и потому существуетъ очень большое число конструкцій мостовыхъ вѣсовъ *).

Напомнимъ при этомъ, что въ уравненія равновѣсія, даваемыя Началомъ Возможныхъ Перемѣщеній, входятъ безконечно малыя возможныя перемѣщенія, т. е. мы беремъ перемѣщенія 1-го порядка, отбрасывая величины 2-го порядка. Поэтому для мостовыхъ вѣсовъ условіе параллельности движенія должно быть выполнено лишь для безконечно малыхъ перемѣщеній платформы, и нѣтъ необходимости, чтобы это условіе выполнялось также и для конечныхъ перемѣщеній.

17. Извѣстные вѣсы Роберваля (фиг. 14) даютъ намъ простѣйшій примѣръ выполненія указаннаго условія. Механизмъ вѣсовъ состоитъ изъ двухъ одинаковыхъ равноплечихъ рычаговъ AOB и CO_1D, съ точками опоры O, O_1. Концы рычаговъ соединены между собой одинаковыми шарнерными стержнями

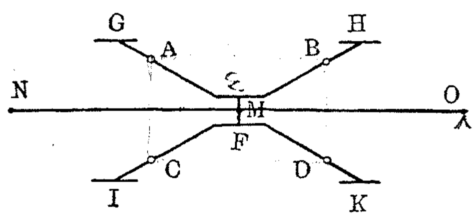
*) Въ кинематической коллекціи Профессора Рёло имѣется очень много моделей „параллельнаго движенія“, примѣняемаго для мостовыхъ вѣсовъ.

AC и BD, такъ что получается шарнерный четырехугольникъ ABDC, который при всѣхъ своихъ перемѣщеніяхъ долженъ сохранить форму параллелограмма. Такая связь вызываетъ одинаковость перемѣщеній для точекъ A и C, т. е. обезпечиваетъ для стержня AC поступательное движеніе; но тогда и чашка вѣсовъ E, неизмѣнно связанная со стержнемъ AC, тоже должна двигаться поступательно. Тоже относится и къ другой чашкѣ F, которая неизмѣнно соединена со стержнемъ BD. Итакъ здѣсь выполнено то основное условіе правильности вѣсовъ, которое было объяснено выше, слѣд. какъ взвѣшиваемый грузъ, такъ и гири могутъ быть помѣщаемы въ любыхъ мѣстахъ чашекъ E, F.

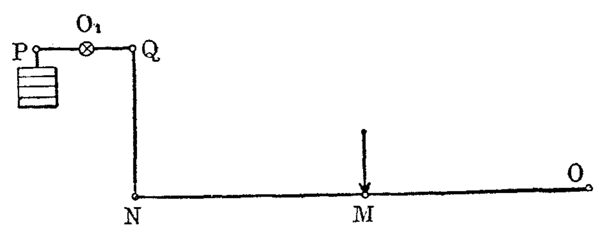


Фиг. 14.

18. На фиг. 15 представлена въ планѣ схема механизма вѣсовъ, примѣняемыхъ для взвѣшиванія тяжелыхъ повозокъ, желѣзнодорожныхъ вагоновъ и т. д. Здѣсь имѣются два одинаковыхъ рычага, изогнутыхъ въ формѣ буквы V; первый изъ нихъ GEH вращается около оси GH, а второй IFK — вращается около оси IK. Середины E, F этихъ рычаговъ соединены поперечнымъ рычагомъ EF, который передаетъ въ точкѣ M давленіе на рычагъ OMN (O — точка опоры). Платформа вѣсовъ опирается на четыре симметричныя точки рычаговъ A, B, C, D, и полная симметрія всего расположенія обезпечиваетъ для этой платформы поступательное движеніе. Остается дополнить этотъ механизмъ приспособленіемъ для помѣщенія гирь; это дополненіе изобра-



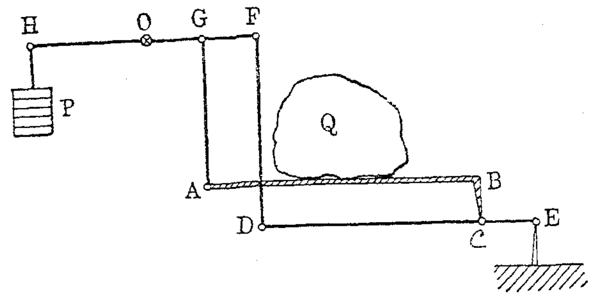
Фиг. 15.



Фиг. 16.

жено на фиг. 16 (боковой видъ); здѣсь конецъ N рычага OMN соединяется съ рычагомъ QO_1P; O_1 есть точка опоры, а въ P подвѣшивается чашка для гирь.

19. Затѣмъ на фиг. 17 представлена схема извѣстныхъ вѣсовъ Квинтенца. Платформа AB передаетъ давленіе на рычагъ HOGF, который вращается около оси O и въ H имѣетъ чашку для гирь P. Конецъ платформы A прямо подвѣшенъ къ этому



Фиг. 17.

рычагу помощью подвѣски AG. Давленіе конца платформы B сначала передается на нижній рычагъ ECD (E — точка опоры), и затѣмъ конецъ D нижняго рычага, помощью подвѣски DF, соединяется съ верхнимъ рычагомъ.

Возможныя вертикальныя перемѣщенія въ этой системѣ опредѣляются связями ея слѣд. образомъ: перемѣщенія точекъ G и F верхняго рычага относятся между собою какъ плечи OG и OF; перемѣщеніе точки A одинаково съ перемѣщеніемъ G, а точка D получаетъ такое же перемѣщеніе, какъ и F. Для нижняго рычага видимъ, что перемѣщенія точекъ C и D относятся какъ плечи EC и ED, а точка платформы B имѣетъ перемѣщеніе одинаковое съ точкой C. Отсюда слѣдуетъ, что перемѣщенія точекъ A и B нашей платформы будутъ относиться какъ OG относится къ OF, уменьшенному въ пропорціи

$$\frac{EC}{ED}.$$

Если плечамъ рычаговъ придадимъ такіе размѣры, что

$$OG = OF.\frac{EC}{ED},$$

то перемѣщенія точекъ A и B будутъ равны между собою; а тогда и для всей платформы возможное движеніе оказывается поступательнымъ. Итакъ, предъидущее уравненіе даетъ правило устройства такихъ вѣсовъ.

20. Разберемъ теперь слѣд. общій вопросъ:

Сколько уравненій равновѣсія даетъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній?

По этой теоремѣ для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю сумма работъ внѣшнихъ силъ для всякаго возможнаго перемѣщенія системы. Слѣд. она даетъ намъ столько уравненій, сколько различныхъ возможныхъ перемѣщеній можетъ имѣть система. Здѣсь нужно считать различными только тѣ перемѣщенія, которыя не приводятся, не замѣняются одни другими. Если, имѣя нѣсколько различныхъ перемѣщеній, мы найдемъ еще перемѣщеніе, которое можетъ быть замѣнено совокупностью прежнихъ, то это не будетъ перемѣщеніе, отличное отъ прежнихъ. Оно не дастъ новаго условія равновѣсія, а мы получимъ лишь уравненіе, которое есть слѣдствіе другихъ уравненій равновѣсія, выведенныхъ для первоначальныхъ различныхъ перемѣщеній.

Однимъ словомъ, число уравненій равновѣсія опредѣляется числомъ неприводимыхъ возможныхъ перемѣщеній, или, иначе, числомъ степеней свободы системы.

21. Для примѣра возьмемъ свободное твердое тѣло, которое будемъ разсматривать какъ неизмѣняемую систему точекъ. Всѣ возможныя перемѣщенія его можно замѣнить слѣдующими двумя группами: a) поступательнымъ движеніемъ по нѣкоторому произвольному направленію; b) вращеніемъ около нѣкоторой произвольно направленной мгновенной оси. Затѣмъ можно идти дальше въ расчлененіи возможныхъ перемѣщеній. Для этого вообразимъ три взаимно перпендикулярныя координатныя оси X, Y, Z. Всякое поступательное движеніе тѣла можетъ быть разложено на три поступательныхъ движенія по тремъ координатнымъ осямъ. Вращеніе около любой мгновенной оси можетъ быть разложено на три вращенія около координатныхъ осей. Такимъ образомъ произвольное безконечно малое перемѣщеніе твердаго тѣла можетъ быть замѣнено шестью элементарными перемѣщеніями: тремя поступательными перемѣщеніями по направленію координатныхъ осей и тремя вращеніями около координатныхъ осей. Эти шесть возможныхъ перемѣщеній неприводимы и не могутъ взаимно замѣняться. Слѣд. свободное твердое тѣло имѣетъ шесть степеней свободы, т. е. шесть различныхъ неприводимыхъ возможныхъ

перемѣщеній. А потому Начало Возможныхъ Перемѣщеній дастъ шесть условій или шесть уравненій необходимыхъ и достаточныхъ для равновѣсія.

Эти уравненія получатся, разсматривая отдѣльно каждое изъ указанныхъ шести перемѣщеній. Возьмемъ, напр., поступательное перемѣщеніе, параллельное оси X, при которомъ всѣ точки тѣла передвигаются на величину δx. Любая внѣшняя сила, приложенная къ тѣлу, дастъ при такомъ перемѣщеніи работу равную

$$X \, . \, \delta x$$

гдѣ черезъ X обозначаемъ проекцію этой силы на ось X-овъ. Складывая работы всѣхъ внѣшнихъ силъ, и обозначая сумму знакомъ Σ, получимъ сумму работъ всѣхъ силъ для избраннаго возможнаго перемѣщенія

$$\Sigma \, (X \delta x)$$

или, выдѣляя общій множитель δx,

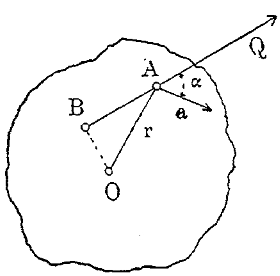
$$\delta x \, . \, \Sigma X$$

По Началу Возможныхъ Перемѣщеній эта сумма работъ должна быть нулемъ, а для этого необходимо требуется, чтобы было

$$\Sigma X = 0,$$

т. е. сумма проекцій всѣхъ внѣшнихъ силъ на ось X-овъ должна равняться нулю. Подобныя же уравненія получимъ и для осей Y и Z. Итакъ необходимо суммы проекцій всѣхъ внѣшнихъ силъ на три координатныя оси должны быть равны нулю.

Разсмотримъ теперь вращательное перемѣщеніе около нѣкоторой оси O (фиг. 18). Любая точка тѣла A получаетъ при этомъ перемѣщеніе Aa, расположенное въ плоскости перпендикулярной къ оси O, перепендикулярное къ радіусу r и пропорціональное величинѣ этого радіуса. Коэффиціентъ пропорціональности, т. е. безконечно малый уголъ поворота тѣла около оси O, назовемъ ω, перемѣщеніе будетъ



Фиг. 18.

$$\omega . r.$$

Если въ точкѣ A приложена нѣкоторая сила P, то работу ея для перемѣщенія Aa получимъ слѣдующимъ образомъ. Разложимъ силу P на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна идетъ параллельно оси O, а другая (Q) расположена въ плоскости, перепендикулярной къ оси, и представляетъ собою проекцію силы P на эту плоскость. Работа первой слагающей будетъ равна нулю, такъ какъ она перпендикулярна къ перемѣщенію Aa. Работа же слагающей Q будетъ произведеніе трехъ множителей: самой силы Q, перемѣщенія Aa, т. е. ωr, и косинуса угла α между Q и перемѣщеніемъ; т. е. эта работа будетъ

$$Q.\omega.r.\mathrm{Cos}\alpha.$$

Но, опустивъ перпендикуляръ OB изъ O на силу Q, имѣемъ

$$OB{=}r.\ \mathrm{Cos}\alpha$$

слѣд. предъидущая работа представляется въ формѣ

$$\omega.Q.OB.$$

Здѣсь входитъ произведеніе Q.OB слѣдующихъ двухъ множителей: a) проекціи внѣшней силы P на плоскость, перпендикулярную къ оси O; b) кратчайшаго разстоянія OB между силою P и осью O. Какъ извѣстно, такое произведеніе называется моментомъ силы P относительно оси O; мы его означимъ буквою M. Итакъ работа силы P равна произведенію угловаго перемѣщенія ω на моментъ силы P. Составимъ такія работы для всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, и сложимъ эти работы; суммированіе означимъ знакомъ Σ и получимъ

$$\Sigma(\omega.M)$$

или, вынося общій множитель ω, находимъ сумму работъ:

$$\omega.\Sigma M.$$

По Началу Возможныхъ Перемѣщеній эта сумма должна быть равна нулю, слѣд. получаемъ условіе равновѣсія

$$\Sigma M{=}0$$

т. е. сумма моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ для оси O должна быть равна нулю. Это условіе мы можемъ примѣнить къ каждому изъ трехъ вращеній около координатныхъ осей и получимъ, что для каждой изъ этихъ осей сумма моментовъ внѣшнихъ силъ должна быть равна нулю.

Окончательно для свободнаго твердаго тѣла, имѣющаго шесть степеней свободы, получаемъ шесть условій необходимыхъ и достаточныхъ для равновѣсія, а именно:

Сумма проекцій всѣхъ внѣшнихъ силъ на три координатныхъ оси должна быть равна нулю.

И сумма моментовъ тѣхъ же силъ относительно трехъ координатныхъ осей тоже должна равняться нулю.

Такъ получаются изъ Начала Возможныхъ Перемѣщенiй эти извѣстныя условiя равновѣсiя.

22. *Несвободное (связанное) твердое тѣло.* Теперь свяжемъ, стѣснимъ свободу перемѣщенiй твердаго тѣла, уменьшимъ число степеней свободы его. Соотвѣтственно этому уменьшится и число условiй, необходимыхъ и достаточныхъ для равновѣсiя. Ихъ будетъ всегда столько же, сколько сохранилось различныхъ возможныхъ перемѣщенiй тѣла. Мы получимъ эти условiя, выразивъ, что сумма работъ внѣшнихъ силъ равна нулю для каждаго изъ различныхъ возможныхъ перемѣщенiй.

Для перваго примѣра возмемъ слѣдующiй случай связаннаго твердаго тѣла: одна точка его сдѣлана неподвижной Эта связь уничтожаетъ всякую возможность поступательнаго движенiя; но тѣло можетъ вращаться около любой изъ осей, проходящихъ черезъ неподвижную точку его.

Такъ какъ вращенiе около любой оси можетъ быть разложено на три вращенiя около трехъ координатныхъ осей, то здѣсь имѣемъ случай трехъ степеней свободы. Три вращенiя около трехъ координатныхъ осей представляютъ три различныя, неприводимыя, возможныя перемѣщенiя, къ которымъ приводятся всѣ остальныя. Для каждаго изъ этихъ трехъ перемѣщенiй сумма работъ внѣшнихъ силъ должна быть равна нулю. А мы уже видѣли, что это даетъ слѣдующiя три условiя:

сумма моментовъ внѣшнихъ силъ для каждой изъ координатныхъ осей должна равняться нулю.

Таковы необходимыя и достаточныя условiя равновѣсiя для случая твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку.

23. Возьмемъ случай, когда перемѣщенiе тѣла еще больше стѣснено связями, чѣмъ въ предъидущемъ примѣрѣ: пусть тѣло имѣетъ двѣ неподвижныя точки, и единственное дозволяемое связами перемѣщенiе есть вращенiе около оси, соединяющей эти точки. Тутъ имѣется только одна степень свободы, одно возможное перемѣщенiе — вращенiе около опредѣленной оси. Слѣд. получится одно уравненiе равновѣсiя. Оно состоитъ въ томъ, что сумма моментовъ внѣшнихъ силъ относительно указанной оси должна равняться нулю.

24. Такимъ же путемъ получимъ условiя равновѣсiя и для другихъ случаевъ связаннаго твердаго тѣла, напр., для тѣла,

опирающагося одной точкой о неподвижную плоскость, или для тѣла, опирающагося на неподвижную плоскость двумя точками, или для тѣла, опирающагося на нѣсколько различныхъ плоскостей. Нужно опредѣлить въ каждомъ случаѣ: каковы перемѣщенія, дозволяемыя связями, и сколько такихъ различныхъ перемѣщеній? Примѣняя Начало Возможныхъ Перемѣщеній къ каждому изъ различныхъ перемѣщеній, получимъ необходимыя и достаточныя условія равновѣсія.

25. ***Общій случай системъ съ одной степенью свободы.*** Разсмотримъ отдѣльно случай системъ, имѣющихъ только одну степень свободы. Эти системы, прежде называвшіяся системами съ полными связями, удовлетворяютъ слѣдующимъ двумъ условіямъ: a) перемѣщеніе каждой точки системы можетъ происходить только по совершенно опредѣленной траекторіи; b) перемѣщеніе одной точки системы вполнѣ опредѣляетъ перемѣщенія всѣхъ остальныхъ ея точекъ.

Такія системы представляютъ особый интересъ, потому что часто встрѣчаются въ приложеніяхъ. Достаточно указать, что почти всѣ наши машины представляютъ системы съ одной степенью свободы. Мы встрѣчаемъ въ машинахъ системы съ двумя и болѣе степенями свободы только въ исключительныхъ случаяхъ. Напр., паровая машина съ регуляторомъ Ватта представляетъ систему съ двумя степенями свободы; здѣсь перемѣщенія муфты регулятора не имѣютъ опредѣленной кинематической связи съ перемѣщеніями кривошипнаго механизма машины. Вообразимъ себѣ еще паровую машину compound; пусть какъ для малаго цилиндра машины (для перваго расширенія пара), такъ и для большого цилиндра (для вторичнаго расширенія пара) поставлено по регулятору Ватта. Это будетъ система съ тремя степенями свободы. Такимъ образомъ, чтобы привести примѣръ такой системы изъ области машинъ, приходится обращаться къ исключительнымъ случаямъ. Въ огромномъ же большинствѣ случаевъ мы въ машинахъ встрѣчаемся съ системами, имѣющими только одну степень свободы *).

Для такихъ системъ получается одно условіе, необходимое

*) Говоря это, мы предполагаемъ, что части машины представляютъ абсолютно—жесткія, неизмѣняемыя тѣла, т. е. пренебрегаемъ упругими измѣненіями этихъ частей. Если же принять во вниманіе упругостей частей машины и разсматривать ихъ измѣненія формы (сжатія, растяженія, изгибы и т. д.), происходящія отъ дѣйствія силъ во время движенія, то машина окажется имѣющей не одну, а значительное число степеней свободы.

и достаточное для равновѣсія. Оно выражается однимъ уравненіемъ, которое по Началу Возможныхъ Перемѣщеній будетъ имѣть слѣдующую форму:

Пусть P, Q, R,... будутъ внѣшнія силы, приложенныя къ системѣ, а

$$p, q, r, \ldots$$

перемѣщенія точекъ приложенія этихъ силъ, проектированныя на направленія силъ. Тогда получаемъ уравненіе:

$$P.p + Q.q + R.r + \ldots = 0.$$

26. ***Случай, когда въ системѣ съ одной степенью свободы приложены только двѣ силы. Золотое правило.*** Пусть эти силы будутъ P и Q; тогда уравненіе равновѣсія будетъ

$$P.p + Q.q = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что работы этихъ двухъ силъ

$$Pp \text{ и } Qq$$

должны различаться знаками. Если одна изъ этихъ работъ, напр., P.p положительная, то работа Q.q должна быть отрицательная. Та изъ двухъ силъ, которая даетъ положительную работу, называется движущей силой, а другая сила, дающая отрицательную работу, называется сопротивленіемъ.

Далѣе изъ того же уравненія получаемъ отношеніе величинъ движущей силы P и сопротивленія Q:

$$\frac{P}{Q} = -\frac{q}{p}$$

т. е. отношеніе численныхъ величинъ этихъ силъ обратно отношенію проекцій перемѣшеній точекъ ихъ приложенія. Этотъ законъ равновѣсія, примѣнимый къ громадному числу случаевъ, для многихъ машинъ и механизмовъ, представляетъ всѣмъ извѣстное золотое правило, которое обыкновенно высказываютъ въ такой формѣ:

сколько выигрываемъ въ силѣ, столько же теряемъ въ скорости.

Въ элементарныхъ курсахъ излагаютъ это правило въ примѣненіи только къ такъ называемымъ простымъ машинамъ. Но изъ предыдущаго видно, что область примѣнимости золотого правила гораздо болѣе обширна и обнимаетъ всѣ системы съ полными связями.

27. *Нѣсколько историческихъ замѣчаній.* Золотое правило Статики иногда приписываютъ Галилею, у котораго оно встрѣчается въ нѣсколькихъ мѣстахъ, между прочимъ въ одномъ изъ раннихъ его сочиненій, спеціально занимающемся вопросомъ о равновѣсіи силъ въ машинахъ *). Говоря о рычагѣ, Галилей замѣчаетъ, что при помощи этого орудія—„то, что пріобрѣтаютъ въ силѣ, то теряютъ въ пройденномъ пути, во времени, въ скорости; это замѣчаніе относится ко всѣмъ другимъ инструментамъ, которые уже были изготовлены, или, можетъ быть, будутъ придуманы".

О томъ же Галилей говоритъ въ позднѣйшемъ, самомъ важномъ и наиболѣе знаменитомъ своемъ сочиненіи „Разговорахъ" **). Здѣсь онъ упоминаетъ объ этомъ правилѣ, какъ о законѣ извѣстномъ и твердо установленномъ для всѣхъ механическихъ орудій „не только опытомъ, но и теоретическими доказательствами". Симпличіо, который въ Разговорахъ служитъ представителемъ взглядовъ перипатетиковъ, замѣчаетъ при этомъ: „Это мнѣ очень хорошо извѣстно; это доказано Аристотелемъ въ его Механическихъ Проблемахъ". Итакъ Галилей приписываетъ открытіе разсматриваемаго нами закона Аристотелю.

Фурье въ своемъ знаменитомъ Мемуарѣ о Статикѣ, въ которомъ въ первый разъ было доказано Начало Возможныхъ Перемѣщеній, высказалъ высокую оцѣнку заслугъ Аристотеля въ Механикѣ. Фурье говоритъ: „Оказывается, что этотъ философъ зналъ наиболѣе важные принципы Механики"... „въ его сочиненіяхъ содержится первая идея Начала Возможныхъ Перемѣщеній" ***).

Но этотъ отзывъ знаменитаго французскаго математика, относящійся къ 1798 году, былъ забытъ, и въ 19-мъ столѣтіи историки Механики обыкновенно не придавали никакого значенія той книгѣ Аристотеля, о которой у Галилея говоритъ Симпличіо. Только недавно (въ 1905 году) Дюгемъ вполнѣ оцѣнилъ Механическія Проблемы Аристотеля и указалъ, что

*) Заглавіе этой книги „Della Scienza Mechanica" нужно перевести словами „Ученіе о Машинахъ" такъ какъ Галилей употребляетъ слова Механика въ этомъ тѣсномъ смыслѣ, а не въ томъ широкомъ, которое теперь придаютъ этому слову. Не имѣя этой книги Галилея, я цитирую по Дюгему.

**) Нѣмецкій переводъ въ Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. № 11, 24, 25. Цитируемое мѣсто см. въ № 24 стр. 119, 120.

***) См. Mémoire sur la statique, въ собраніи сочиненій Фурье: Oeuvres de Fourier. T, II. p. 477.

въ этомъ сочиненіи содержится ясный зародышъ Начала Возможныхъ Перемѣщеній, т. е. пришелъ къ тому же заключенію, что и Фурье*).

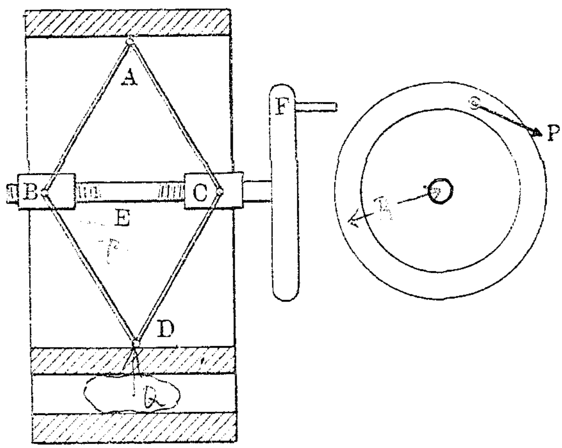
Затѣмъ отмѣтимъ, что Ньютонъ въ Principia высказываетъ золотое правило совершенно опредѣленно въ примѣненіи къ всевозможнымъ машинамъ:

„Если машины построены такъ, что скорости движущей и сопротивляющейся частей машины относятся обратно пропорціонально силамъ, то движущая сила будетъ уравновѣшивать сопротивленіе“ **).

28. *Примѣненіе золотого правила.* Помощью этого правила мы сейчасъ получаемъ извѣстныя условія равновѣсія для многихъ машинъ—наклонной плоскости, клина, винта, зубчатой передачи и т. д.

Не останавливаясь на простыхъ всѣмъ извѣстныхъ случаяхъ, укажемъ еще на слѣдующую машину.

Колѣнчатый прессъ (фиг. 19). Главную часть его соста-



Фиг. 19.

*) Пользуюсь случаемъ, чтобы обратить вниманіе читателей на это историческое изслѣдованіе Дюгема: P. Duhem. Les origines de la statique. Это очень интересная книга, во многомъ измѣняющая прежніе взгляды на историческое развитіе Статики и на значеніе ученыхъ дѣятелей этой науки. Дюгемъ въ особенности выдвигаетъ впередъ Аристотеля и забытыхъ средневѣковыхъ ученыхъ, разрабатывавшихъ Статику въ духѣ Стагирита.

**) Цитирую по нѣмецкому переводу Вольферса: Sir Isaac Newton's Mathematische Principien der Naturlehre. S. 44.

вляетъ шарнирный ромбъ ABCD; точка A неподвижна, а при сближенiи шарнеровъ B и C получается давленiе книзу точки D и при этомъ—сжатiе прессуемаго предмета. Для сближенiя шарнеровъ B и C служитъ винтъ E, который проходитъ черезъ гайки, соединенныя съ этими шарнерами; винтовыя нарѣзки въ этихъ двухъ гайкахъ имѣютъ противуположное направленiе. Для полученiя требуемаго дѣйствiя остается только вращать винтъ E, помощью колеса F.

Здѣсь имѣемъ двѣ внѣшнiя силы: движущую P, которая вращаетъ колесо F, и сопротивленiе сжимаемаго предмета Q. При поворачиванiи колеса на безконечно малый уголъ ω, перемѣщенiе точки приложенiя силы P будетъ

$$R.\omega$$

(R—радiусъ колеса). Если шагъ винта есть p, то, при поворачиванiи винта на цѣлый оборотъ, каждая гайка пройдетъ путь p, и гайки сблизятся на величину

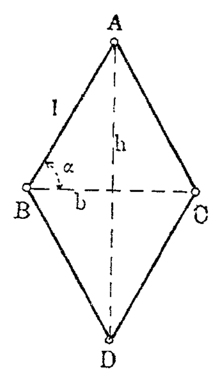
$$2p.$$

При поворачиванiи же на уголъ ω сближенiе будетъ меньше въ отношенiи

$$\frac{\omega}{2\pi},$$

т. е. окажется равнымъ

$$p.\frac{\omega}{\pi} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1).$$



Фиг. 20.

Зная это сближенiе, найдемъ перемѣщенiе точки D. Для этого обратимся къ фиг. 20; здѣсь стороны нашего ромба названы l, длины дiагоналей означены буквами h и b и уголъ ABC — черезъ α. Мы получаемъ

$$h = 2l \,.\, \mathrm{Sin}\alpha$$
$$b = 2l\, \mathrm{Cos}\alpha.$$

Дифференцируя эти выраженiя, мы найдемъ безконечно малыя возможныя перемѣщенiя:

$$dh = 2l.\mathrm{Cos}\alpha.\ d\alpha$$
$$db = -2l\,\mathrm{Sin}\alpha.\ d\alpha$$

Отсюда

$$dh = -\frac{db}{\mathrm{tg}\alpha}$$

Здѣсь знакъ минусъ означаетъ, что когда діагональ b уменьшается, то діогональ h увеличивается и обратно. Вставимъ сюда вмѣсто db прежде полученное выраженіе (1) для сближенія точекъ B и C, тогда dh представитъ вертикальное перемѣщеніе точки D и будетъ

$$dh = p.\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{1}{tg\alpha}.$$

Поэтому условіе равновѣсія, выражающее, что силы Q и P обратно пропорціональны соотвѣтствующимъ перемѣщеніямъ, будетъ:

$$\frac{Q}{P} = \frac{R.\omega}{p.\omega}.\pi tg\alpha = \frac{\pi R}{p} tg\alpha.$$

При постепенномъ сжиманіи прессуемаго предмета, уголъ α будетъ увеличиваться, и вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ рости отношеніе

$$\frac{Q}{P},$$

т. е. при постоянной работающей силѣ P будетъ постепенно увеличиваться сжимающая сила Q. Именно это и требуется при всѣхъ работахъ по прессованію.

29. *Принципъ отвердѣнія.* Для вывода условій равновѣсія системъ (жидкихъ тѣлъ, гибкихъ нитей и т. д.) часто пользуются этимъ принципомъ, который заключается въ слѣдующемъ:

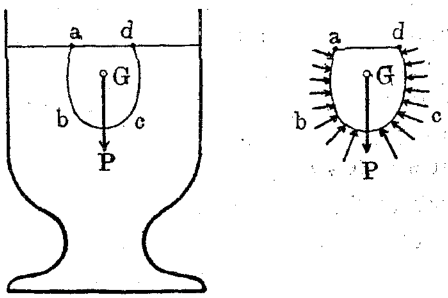
если система находится въ равновѣсіи, то мы можемъ предположить, что эта система отвердѣла и сдѣлалась вполнѣ жесткой, неизмѣняемой; равновѣсіе при этомъ не будетъ нарушено.

Предположивши отвердѣніе системы, мы можемъ примѣнять къ ней уравненія равновѣсія твердаго тѣла. Такимъ образомъ вопросы о равновѣсіи различныхъ системъ приводятся къ равновѣсію простѣйшей системы—неизмѣняемаго твердаго тѣла.

Этотъ принципъ представляетъ частный случай болѣе общаго принципа, также примѣняемаго для разысканія условій равновѣсія, а именно слѣдующаго:

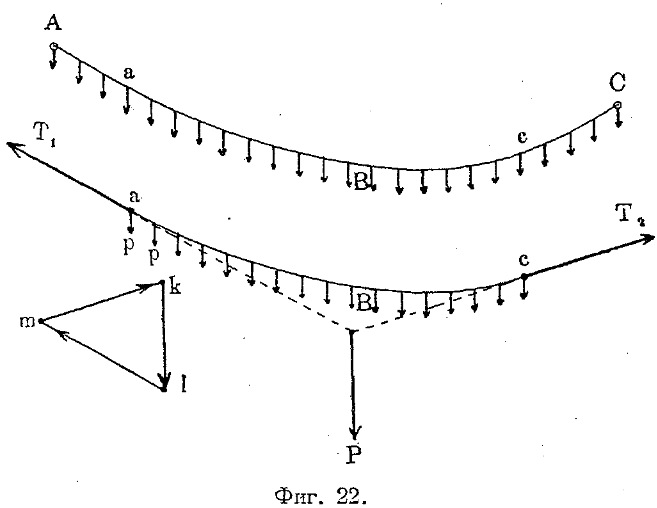
Если система находится въ равновѣсіи, то это равновѣсіе не нарушится введеніемъ новыхъ связей, т. е. новыхъ стѣсненій, ограничивающихъ возможныя перемѣщенія.

Какъ примѣръ приложенія принципа отвердѣнія приведемъ извѣстное разсужденіе элементарной гидростатики (фиг. 21): выдѣлимъ мысленно часть жидкости, ограниченную поверхностью abcd, и предположимъ, что жидкость отвердѣла; равновѣсіе не нарушится при этомъ. Слѣдовательно давленія, производимыя жидкостью на поверхность abcd, уравновѣшиваютъ вѣсъ P отвердѣвшей части. Поэтому эти давленія должны быть таковы, что равнодѣйствующая ихъ равна и противуположна силѣ P.



Фиг. 21.

Вотъ другой примѣръ (фиг. 22): имѣемъ тяжелую гибкую нить ABC, подвѣшенную въ точкахъ A и C. Выдѣлимъ какую нибудь часть ея aBc, для чего нужно сдѣлать мысленные разрѣзы въ a и c и замѣнить имѣющуюся здѣсь связь частей нити силами T_1, T_2, которыя называются натяженіями нити и идутъ по



Фиг. 22.

направленію касательныхъ къ нити въ точкахъ a, c. Эти двѣ силы уравновѣшиваютъ вѣса p, p . . . частей нити, лежащихъ между a и c. Теперь предположимъ, что нить отвердѣла, и примѣнимъ къ ней условія равновѣсія твердаго тѣла. Прежде всего, имѣя дѣло съ твердымъ тѣломъ, мы можемъ замѣнить параллельныя силы p, p . . . одной равнодѣйствующей P, которая найдется по извѣстнымъ правиламъ. Тогда мы имѣемъ три силы P, T_1, T_2, лежащія въ одной плоскости и взаимно уравновѣшивающіяся на твердомъ тѣлѣ. Какъ извѣстно, эти три силы должны сходиться въ одной точкѣ, т. е. P должна проходить черезъ точку пересѣченія продолженныхъ T_1 и T_2. Затѣмъ если три три силы уравновѣшиваются на твердомъ тѣлѣ, то, откладывая ихъ одну за другою по ихъ направленіямъ, должны получить сомкнутый треугольникъ. Поэтому отложимъ величину P по kl, черезъ k проведемъ параллельную T_2, а черезъ l . . . параллельную T_1, и найдемъ точку встрѣчи этихъ линій m. Мы получаемъ треугольникъ равновѣсія указанныхъ силъ; отрѣзокъ lm представитъ силу T_1, а отрѣзокъ mk даетъ силу T_2.

Принципъ отвердѣнія, какъ всякое частное условіе равновѣсія, можетъ быть полученъ изъ общаго закона равновѣсія, т. е. изъ Начала Возможныхъ Перемѣщеній. При этомъ выясняется, въ какихъ случаяхъ и при какихъ условіяхъ можетъ быть примѣняемъ принципъ отвердѣнія.

Съ точки зрѣнія Начала Возможныхъ Перемѣщеній каждое уравненіе равновѣсія представляетъ собою выраженіе того закона, что сумма работъ внѣшнихъ силъ, для нѣкотораго перемѣщенія, дозволяемаго связями, равна нулю. Поэтому мы можемъ примѣнять уравненія равновѣсія твердаго тѣла къ такимъ системамъ, для которыхъ возможны такія же перемѣщенія, какъ для твердаго тѣла. Если связи системы не дозволяютъ ей имѣть такія перемѣщенія, то нельзя къ ней прямо примѣнять уравненія равновѣсія твердаго тѣла. Но тогда можно уничтожить тѣ связи, которыя препятствуютъ указаннымъ перемѣщеніямъ замѣнить эти связи силами, и причислить силы связи къ внѣшнимъ силамъ. Тогда получается возможность приложить къ нашей системѣ уравненія равновѣсія твердаго тѣла.

Мы такъ и поступаемъ въ тѣхъ двухъ примѣрахъ, которые были приведены. Въ жидкомъ тѣлѣ, отдѣливши часть его abcd, мы замѣняемъ связь ея съ остальной жидкостью силами давленіями. Въ гибкомъ тѣлѣ, уничтоживъ связь въ точкахъ a, c, мы замѣняемъ эту связь силами T_1, T_2, которыя причисляемъ къ внѣшнимъ силамъ.

30. ***Равнодѣйствующія или эквивалентныя системы силъ.*** Мы знакомимся съ этимъ понятіемъ прежде всего въ Статикѣ твердаго тѣла. Равнодѣйствующими или эквивалентными системами называются такія двѣ системы силъ, которыя могутъ замѣнять одна другую безъ нарушенія равновѣсія. Такое понятіе объ эквивалентности двухъ системъ силъ можно распространить и на любую механическую систему, съ произвольнымъ

численомъ степеней свободы. Начало Возможныхъ Перемѣщеній дастъ намъ общее условіе такой эквивалентности.

Положимъ, въ системѣ дѣйствуютъ внѣшнія силы, состоящія изъ двухъ группъ:

$$P,\ Q,\ R\ \ldots \text{ и } P_1,\ Q_1,\ R_1\ \ldots$$

и находящіяся въ равновѣсіи. Пусть соотвѣтствующія имъ возможныя перемѣщенія будутъ:

$$p, q, r\ \ldots\ p_1,\ q_1,\ r_1\ \ldots$$

Тогда условія равновѣсія будутъ имѣть форму

$$2)\qquad Pp + Qq + Rr + \ldots + P_1p_1 + Q_1q_1 + R_1r_1 + \ldots = 0;$$

число ихъ равно числу степеней свободы системы. Вообразимъ себѣ такую новую группу внѣшнихъ силъ

$$P_2,\ Q_2,\ R_2\ \ldots,$$

что работа для возможныхъ перемѣщеній ихъ точекъ приложенія, т. е. работа,

$$P_2p_2 + Q_2q_2 + R_2r_2 + \ldots$$

равна работѣ силъ группы

$$P_1,\ Q_1,\ R_1\ \ldots,$$

т. е. положимъ, что существуютъ равенства:

$$3)\qquad P_1p_1 + Q_1q_1 + R_1r_1 + \ldots = P_2p_2 + Q_2q_2 + \ldots,$$

удовлетворяющіяся для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній.

Группа силъ

$$P_2,\ Q_2,\ R_2\ \ldots\ (A)$$

можетъ отличаться отъ силъ

$$P_1,\ Q_1,\ R_1\ \ldots\ (B)$$

какъ по числу силъ въ группѣ, такъ и по величинамъ, направленіямъ и точкамъ приложенія силъ. Единственное требованіе состоитъ въ выполненіи условій 3).

Очевидно, мы можемъ въ нашей механической системѣ замѣнить всю группу силъ (B) новой группой (A), и равновѣсіе при этомъ не нарушится, такъ какъ всѣ условія, устанавливаемыя Началомъ Возможныхъ Перемѣщеній, будутъ попрежнему выполнены. Дѣйствительно эти условія имѣютъ форму (2), и такія уравненія будутъ по прежнему удовлетворены, только въ нихъ вмѣсто суммы

$$P_1 p_1 + Q_1 q_1 + R_1 r_1 + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

будетъ стоять равная ей сумма

$$P_2 p_2 + Q_2 q_2 + R_2 r_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Итакъ: двѣ группы силъ эквивалентны, если работы ихъ для всякаго возможнаго перемѣщенія системы одинаковы. Вотъ въ чемъ состоитъ общій законъ эквивалентности силъ для любой механической системы. Изъ него сейчасъ получаютси условія, опредѣляющія равнодѣйствующія системы силъ для различныхъ частныхъ случаевъ.

31. *Примѣръ.* Начнемъ со случая свободнаго твердаго тѣла. Здѣсь имѣемъ шесть степеней свободы, т. е. шесть различныхъ неприводимыхъ возможныхъ перемѣщеній: три поступательныхъ перемѣщенія по тремъ координатнымъ осямъ и три вращенія около трехъ координатныхъ осей. Для каждаго изъ этихъ перемѣщеній двѣ равнодѣйствующія системы силъ должны давать одинаковыя работы. Всего получимъ шесть условій, раздѣляющихся на двѣ группы уравненій, по три въ каждой группѣ.

Возьмемъ одно изъ условій, относящихся къ группѣ поступательныхъ перемѣщеній, напр., условіе для перемѣщеній по оси X. Работа силъ для такого перемѣщенія равна величинѣ самаго перемѣщенія, умноженной на сумму проекцій силъ для оси X. Для равенства работъ необходимо, чтобы равнодѣйствующія системы силъ имѣли равными суммы проекцій на ось X. Такія же условія получимъ и для двухъ другихъ осей.

Переходимъ къ условіямъ для вращательныхъ перемѣщеній, напр., для вращенія около оси X. Мы выше показали (n° 21), что работа внѣшнихъ силъ для такого перемѣщенія равна произведенію изъ угловой величины перемѣщенія на сумму моментовъ силъ относительно оси X. Условіе равенства такихъ работъ для двухъ равнодѣйствующихъ системъ силъ требуетъ, чтобы обѣ системы имѣли одинаковыя суммы моментовъ относительно оси X. Подобныя же два уравненія получимъ для осей Y, Z.

Итакъ необходимыя и достаточныя условія для того, чтобы двѣ системы силъ, приложенныя къ свободному твердому тѣлу, были равнодѣйствующими, заключаются въ слѣдующемъ:

Эти двѣ системы силъ должны имѣть одинаковыя суммы, проекцій и одинаковыя суммы моментовъ для трехъ координатныхъ осей.

32. Возьмемъ одинъ изъ случаевъ связаннаго твердаго тѣла. Пусть единственное перемѣщеніе, дозволяемое связами, есть вращеніе около нѣкоторой оси. Равнодѣйствующія системы должны удовлетворять только одному условію; онѣ должны давать одинаковыя работы для этого единственнаго перемѣщенія. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы эти двѣ системы силъ имѣли одинаковыя суммы моментовъ для оси, около которой связи дозволяютъ вращеніе.

33. Въ видѣ примѣра приложенія общей теоріи о равнодѣйствующихъ системахъ силъ можно разобрать условія, при которыхъ двѣ пары, приложенныя къ свободному твердому тѣлу, могутъ считаться равнодѣйствующими.

Также легко вывести условіе, при соблюденіи котораго данная система силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, можетъ быть замѣнена одной силой. Какъ извѣстно, это условіе состоитъ въ выполненіи уравненія:

$$LX + M\ Y + NZ = 0,$$

гдѣ X, Y, Z суммы проекцій данной системы силъ, а L, M, N суммы моментовъ ихъ для трехъ координатныхъ осей X, Y, Z.

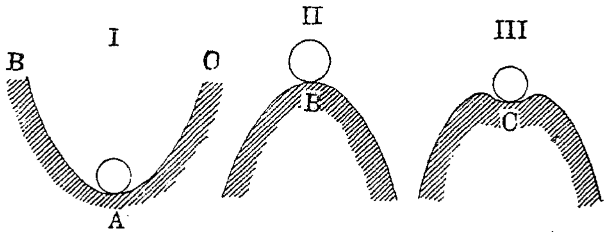
34. Пользуясь той же общей теоріей, сейчасъ докажемъ, что пара силъ не можетъ быть замѣнена одной равнодѣйствующей силой. На самомъ дѣлѣ работа пары для всякаго поступательнаго движенія равна нулю, такъ какъ работа одной изъ силъ, составляющихъ пару, уничтожается работой другой силы. Между тѣмъ работа равнодѣйствующей силы не будетъ нулемъ для всякаго поступательнаго движенія. Слѣдовательно пара и сила не могутъ быть двумя эквивалентными системами.

Въ слѣдующей бесѣдѣ мы приведемъ еще нѣсколько примѣровъ приложенія общей теоріи эквивалентныхъ, т. е. равнодѣйствующихъ системъ силъ.

35. *Устойчивое и неустойчивое равновѣсіе.* Простѣйшимъ примѣромъ устойчиваго равновѣсія намъ послужитъ тяжелый шарикъ, находящійся внутри чашки (фиг. 23 (I). Нижняя точка чашки A представляетъ положеніе устойчиваго равновѣсія для этого шарика; если мы немного отклонимъ шарикъ изъ этого

положенія, и затѣмъ отпустимъ его, то шарикъ будетъ колебаться около положенія А. То же произойдетъ, если мы сообщимъ небольшой толчекъ этому шарику, когда онъ находится въ положеніи А.

Напротивъ того шарикъ, расположенный, какъ на фиг. 23 (II),



Фиг. 23.

въ верхней точкѣ В выпуклой поверхности, находится въ неустойчивомъ положеніи.

Наконецъ тяжелый шарикъ, лежащій на горизонтальной плоскости, находится въ положеніи безразличнаго равновѣсія.

36. Эти общеизвѣстныя понятія о характерѣ равновѣсія нуждаются въ нѣкоторыхъ дополненіяхъ.

Вмѣсто обыкновенной чашки, какъ на фиг. 23, предположимъ, что имѣемъ дѣло съ цилиндрической поверхностью; пусть на той же фигурѣ ВАС представляетъ направляющую этой поверхности, а производящія ея будутъ горизонтальныя прямыя. При отклоненіи шарика изъ А по направленію такой производящей, мы не замѣтимъ въ немъ стремленія вернуться къ первоначальному своему положенію, т. е. будемъ имѣть случай безразличнаго равновѣсія. При отклоненіи шарика по поверхности цилиндра для всѣхъ другихъ направленій, мы будемъ имѣть случай устойчиваго равновѣсія. И такъ характеръ равновѣсія можетъ быть различный для разныхъ направленій отклоненія отъ равновѣснаго положенія.

Вообразимъ себѣ обыкновенное сѣдло и помѣстимъ шарикъ въ средней точкѣ сѣдла. Здѣсь тоже характеръ равновѣсія будетъ различный для отклоненій разнаго направленія. При нѣкоторыхъ отклоненіяхъ шарикъ повышается; предоставленный самому себѣ, онъ будетъ стремиться опускаться и вернуться къ первоначальному положенію равновѣсія; мы будемъ имѣть дѣло съ устойчивымъ равновѣсіемъ. При другихъ направленіяхъ отклоненія шарикъ понижается, и тогда равновѣсіе оказывается неустойчивымъ. И такъ и здѣсь характеръ равновѣсія разный для различныхъ направленій отклоненія отъ равновѣснаго положенія.

37. *Иногда характеръ равновѣсія измѣняется съ перемѣной величины отклоненія отъ равновѣснаго положенія.* Такъ для чашки, имѣющей въ разрѣзѣ форму фиг. 23 (III), положеніе шарика въ A оказывается устойчивымъ для небольшихъ отклоненій, или небольшихъ толчковъ. Если же отклоненія или толчки велики, то шарикъ будетъ совсѣмъ выброшенъ изъ чашки и не вернется къ точкѣ A.

Подобный случай иногда замѣчается при разсмотрѣніи устойчивости судовъ на водѣ. Здѣсь приходится главнымъ образомъ заниматься поперечными наклоненіями судовъ и поперечными ихъ качаніями. Иногда оказывается, что судно, которое проявляетъ хорошую устойчивость при малыхъ углахъ наклоненія, дѣлается совершенно неустойчивымъ при большихъ углахъ наклоненія, напр., при углахъ бо́льшихъ 55 градусовъ; при отклоненіи на такой уголъ судно вѣроятно перевернется. Это можетъ получиться, при извѣстныхъ условіяхъ, для плоскодонныхъ судовъ.

Бываютъ и обратные случаи: для малыхъ угловъ отклоненія судно оказывается неустойчивымъ, т. е. вычисленія даютъ для него отрицательную метацентрическую высоту. Но при большихъ углахъ наклоненія, напр., при углахъ, превышающихъ 25°, оказывается, что появляется довольно значительный вращающій моментъ, который стремится вернуть судно къ первоначальному его положенію. То есть при такихъ углахъ судно достаточно устойчиво.

38. Замѣтимъ, что въ практическихъ конструкціяхъ допустимы только случаи устойчиваго равновѣсія, притомъ устойчивость должна соблюдаться для всѣхъ направленій оклоненія. Съ технической точки зрѣнія имѣется существенное различіе между равновѣсіемъ устойчивымъ и двумя другими видами равновѣсія; эти послѣднія даже и не считаются равновѣсіемъ.

39. *Критерій для опредѣленія характера равновѣсія.* Мы не будемъ разбирать вопросъ о характерѣ равновѣсія во всей его полнотѣ и общности. Ограничимся нѣсколькими соображеніями, которымъ не придаемъ значенія строгихъ доказательствъ; но они хотя отчасти разъяснятъ этотъ важный вопросъ.

Вернемся къ Лагранжеву доказательству основнаго закона равновѣсія. Въ немъ фигурировалъ грузъ π, который одинъ замѣнялъ и представлялъ собою всѣ внѣшнія силы, приложенныя къ системѣ. Мы разсматривали безконечно малыя перемѣщенія, дозволяемыя связями.

Въ случаѣ равновѣсія, высота груза π не перемѣнялась при такихъ безконечно малыхъ перемѣщеніяхъ. Теперь предположимъ, что перемѣщенія, хотя очень малыя, но конечныя. Опять мысленно перепробуемъ всѣ перемѣщенія, дозволяемыя связями, начиная съ положенія равновѣсія, и будемъ слѣдить за грузомъ π.

Предположимъ, что эта проба покажетъ слѣдующее: положеніе груза π для равновѣснаго положенія есть самое низкое изъ всѣхъ другихъ положеній, занимаемыхъ имъ при нашихъ пробахъ. Тогда мы можемъ утверждать, что это положеніе равновѣсія будетъ устойчивое.

Если же при нашихъ пробахъ окажется: положеніе груза π при равновѣсіи есть самое высокое изъ всѣхъ положеній, занимаемыхъ имъ при нашихъ пробахъ. Тогда естественно приходимъ къ заключенію, что это положеніе равновѣсія неустойчивое.

По прежнему будемъ называть внѣшнія силы черезъ

$$P, Q, R, S \ldots,$$

а соотвѣтствующія имъ проекціи безконечно малыхъ возможныхъ перемѣщеній черезъ

$$p, q, r, s \ldots$$

Тогда, какъ видѣли въ n° 9, вслѣдствіе такихъ перемѣщеній получится пониженіе груза равное

$$np + mq + \ldots -$$

т. е. равное

$$\frac{1}{\pi}\left\{ Pp + Qq + Rr + Ss + \ldots \right\} \ldots (4).$$

Складывая эти величины для элементарныхъ безконечно малыхъ перемѣщеній, на которыя можно раздѣлить конечное перемѣщеніе, мы получимъ въ суммѣ пониженіе груза для конечнаго перемѣщенія системы. Если оно будетъ всегда положительное, то равновѣсіе неустойчивое.

Предположимъ теперь обратное—пусть выраженіе (4) отрицательное (это возможно такъ какъ проекціи перемѣщеній

$$p, q, r, s$$

могутъ быть отрицательными). Такой результатъ укажетъ на повышеніе груза π при перемѣщеніяхъ, и слѣд. равновѣсіе устойчивое.

Конечно при этомъ разборѣ можно не обращать вниманія на величину груза π, и вмѣсто выраженія (4) разсматривать только множитель

$$Pp+Qq+Rr+\ldots (5),$$

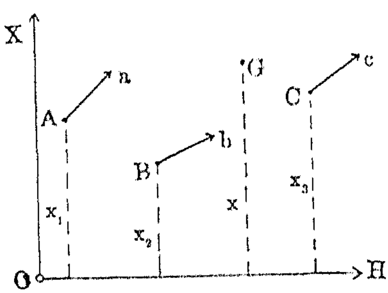
т. е. работу внѣшнихъ силъ. И такъ окончательно получаемъ такой критерій для различенія характера равновѣсія:

Суммируемъ выраженія элементарной работы внѣшнихъ силъ, начиная отъ положенія равновѣсія и кончая другимъ близкимъ къ нему возможнымъ положеніемъ. Если эта сумма окажется положительной для каждаго возможнаго перемѣщенія, то равновѣсіе неустойчивое. Если же она отрицательная, то равновѣсіе устойчивое.

40. *Равновѣсіе системъ подъ дѣйствіемъ силъ тяжести.* Чтобы показать, какъ приводится въ исполненіе наше правило для различенія характера равновѣсія, разсмотримъ слѣдующій важный частный случай: всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на систему, суть силы тяжести.

Пусть A, B, C (фиг. 24 будутъ мѣста расположенія отдѣльныхъ грузовъ

$$P_1\ P_2\ P_2 \ldots;$$



Фиг. 24.

безконечно малыя возможныя перемѣщенія ихъ пусть будутъ:

$$Aa,\ Bb,\ Cc \ldots$$

Проведемъ какую нибудь горизонтальную плоскость H и будемъ отмѣчать высоты грузовъ надъ этой плоскостью

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots$$

Проекціи безконечно малыхъ перемѣщеній на ось X назовемъ

$$dx_1,\ dx_2,\ dx_3 \ldots$$

Тогда сумма работъ всѣхъ грузовъ для этихъ перемѣшеній будетъ

$$-(P_1 . dx_1 + P_2 . dx_2 + P_3 . dx_3 + \ldots).$$

Здѣсь поставленъ знакъ минусъ потому, что направленіе оси X противоположно направленію силы тяжести; слѣдовательно, при увеличеніи высоты x, получается отрицательная работа.

Такъ какъ P_1, P_2... представляютъ постоянныя величины, то предъидущее выраженіе можно написать въ формѣ дифференціала суммы:

$$-d\left\{P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\ldots\right\}\ldots(6).$$

Пусть G будетъ общій центръ тяжести всѣхъ нашихъ грузовъ, а x высота его надъ основной плоскостью H. Тогда по опредѣленію центра тяжести, называя сумму всѣхъ грузовъ черезъ P, имѣемъ:

$$P_1x_1+P_2x_2+\ldots=P.x.$$

Слѣд. выраженіе (6) получитъ видъ:

$$-d\left\{P.x\right\}=-P.dx\ \ldots\ (7).$$

Такимъ образомъ работа всѣхъ внѣшнихъ силъ для безконечно малаго перемѣщенія имѣетъ очень простой видъ; легко суммировать эти элементарныя работы и получить соотвѣтствующую величину для конечнаго перемѣщенія. Для этого нужно только просуммировать величины dx. Пусть начальная высота центра тяжести G надъ плоскостью H отвѣчающая положенію равновѣсія есть h_0, а окончательная высота для конечннго перемѣщенія системы есть h; тогда сумма всѣхъ элементарныхъ значеній dx будетъ равна разности

$$h-h_0$$

и суммированіе величинъ (7) даетъ

$$P.(h_0-h).$$

По изложенному общему правилу равновѣсіе будетъ устойчивое, если это выраженіе всегда отрицательное, т. е. если всегда

$$h_0<h.$$

Итакъ равновѣсіе будетъ устойчивое, если центръ тяжести занимаетъ самое низкое изъ возможныхъ для него положеній.

Наоборотъ равновѣсіе будетъ неустойчивое, если центръ тяжести занимаетъ самое высокое изъ возможныхъ для него положеній.

Это простое правило позволяетъ во всѣхъ случаяхъ безъ труда опредѣлить характеръ равновѣсія системы, подверженной дѣйствію силы тяжести.

Замѣтимъ, что въ прежнее время очень часто въ элементарныхъ курсахъ предлагали слѣдующее правило:

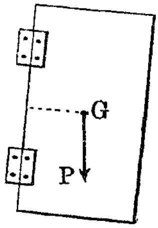
равновѣсіе устойчиво, если точка опоры выше центра тяжести, и неустойчиво, если точка опоры ниже центра тяжести.

Такое правило невѣрно; достаточно указать на извѣстную игрушку „ванька-встанька", чтобы видѣть явное противорѣчіе этому правилу.

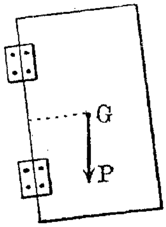
Примѣры устойчиваго и неустойчиваго равновѣсія тяжелыхъ системъ.

1. Дверь (фиг. 25), петли которой расположены по наклонной линіи. Очевидно при закрытой двери центръ тяжести ея G занимаетъ самое низкое возможное для него положеніе. Слѣд. это будетъ положеніе устойчиваго равновѣсія. Такая дверь всегда сама закрывается.

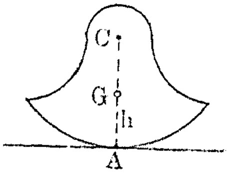
2. При расположеніи же линіи петель какъ на фиг. (26) по-



Фиг. 25.



Фиг. 26.



Фиг. 27.

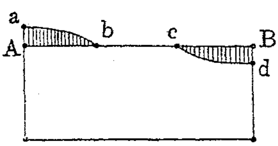
лучается обратное. Когда дверь закрыта, то центръ тяжести ея G занимаетъ самое высокое возможное для него положеніе; слѣд. это положеніе неустойчиваго равновѣсія. Такая дверь всегда стремится открыться.

3. При устройствѣ игрушки, называемой „ванька-встанька", должно быть выполнено слѣд. условіе (фиг. 27): центръ тяжести G долженъ лежать выше центра C шаровой опорной поверхности. Тогда при наклоненіи игрушки центръ тяжести повышается.

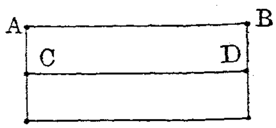
4. Разсмотримъ равновѣсіе однороднаго тяжелаго трехосьнаго эллипсоида, положеннаго на горизонтальную плоскость. Если онъ

прикасается къ плоскости концомъ своей малой оси, то центръ тяжести его занимаетъ самое низкое возможное для него положеніе, и равновѣсіе устойчивое. Если точка касанія лежитъ на концѣ большой оси эллипсоида, то центръ тяжести занимаетъ самое высокое возможное для него положеніе, и равновѣсіе неустойчивое. Если эллипсоидъ прикасается къ плоскости концомъ своей средней оси, то равновѣсіе его устойчиво для нѣкоторыхъ перемѣщеній и неустойчиво для другихъ перемѣщеній.

5. Поверхность тяжелой жидкости, налитой въ сосудѣ, должна быть горизонтальна, потому что при этомъ условіи центръ тяжести жидкости занимаетъ самое низкое возможное для него положеніе. Дѣйствительно всякое отступленіе отъ горизонтальной поверхности AB (фиг. 28), напр., замѣна ея поверхностью



Фиг. 28.



Фиг. 29.

abcd, влечетъ за собою повышеніе центра тяжести; при такой замѣнѣ часть жидкости cbd замѣняется такимъ же объемомъ aba, но расположеннымъ выше.

6. Если въ сосудъ налиты двѣ жидкости разной плотности, то поверхность раздѣла между ними CD (фиг. 29) должна быть горизонтальна, и болѣе легкая жидкость должна быть вверху.

Такое расположеніе даетъ самое низкое возможное положеніе центра тяжести, т. е. представляетъ положеніе устойчиваго равновѣсія.

Если же, при горизонтальной поверхности раздѣла жидкостей, болѣе тяжелая изъ нихъ расположена вверху, то мы получаемъ неустойчивое равновѣсіе. Дѣйствительно такое размѣщеніе даетъ самое низкое возможное положеніе центра тяжести этой системы.

7. Обратимся къ вопросу о равновѣсіи твердаго тѣла, погруженнаго въ жидкость.

Примѣнимъ и здѣсь то условіе, что въ положеніи устойчиваго равновѣсія центръ тяжести занимаетъ самое низкое возможное для него положеніе. Здѣсь имѣемъ систему, состоящую изъ совокупности погруженнаго твердаго тѣла и воды, наполняющей нѣкоторый сосудъ; общій центръ тяжести этой системы долженъ занимать самое низкое положеніе. Это условіе, примѣненное къ вертикальнымъ поступательнымъ перемѣщеніямъ погруженнаго тѣла, дастъ намъ принципъ Архимеда.

Разсматривая боковыя качанія погруженнаго тѣла, напр., какого нибудь судна, изъ того же условія о положеніи центра тяжести получимъ правила устойчивости судовъ, т. е. ученіе о метацентрѣ.

ВТОРАЯ БЕСѢДА.

Равновѣсіе плоскихъ механизмовъ.

41. Мы будемъ разсматривать только плоскіе механизмы, т. е. такіе, что всѣ части ихъ движутся въ одной и той же плоскости *). Этимъ ограниченіемъ мы лишь немного съуживаемъ область нашего разсмотрѣнія, такъ какъ большинство употребительныхъ механизмовъ относится къ разряду плоскихъ. Изъ числа часто примѣняемыхъ механизмовъ, только винтъ, винтовыя колеса, коническія колеса и шарнеръ Гука не будутъ включены въ наше разсмотрѣніе.

Въ то же время будемъ считать, что всѣ силы, дѣйствующія на механизмъ, расположены въ одной плоскости, въ плоскости движенія частей его.

При изученіи механизмовъ будемъ смотрѣть на нихъ съ точки зрѣнія, установленной Рёло; механизмъ разматривается какъ замкнутая кинематическая цѣпь, одно изъ звеньевъ которой неподвижно. Такое включеніе въ механизмъ неподвижной части, т. е. устоя или рамы машины, оказалось очень плодотворнымъ. Съ этимъ взглядомъ связанъ пріемъ обращенія механизмовъ; изъ данной кинематической цѣпи можно получать нѣсколько разныхъ механизмовъ, часто вовсе другъ на друга не похожихъ; для этого нужно дѣлать неподвижнымъ тотъ или другой членъ цѣпи **). Очевидно число разныхъ механизмовъ, получаемыхъ изъ одной цѣпи, опредѣляется числомъ ея звеньевъ.

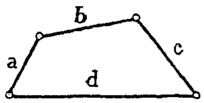
Примѣры кинематическихъ цѣпей, которыя мы будемъ

---

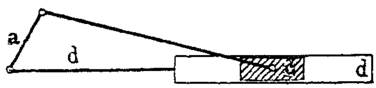
*) Конечно къ этому случаю легко привести и тотъ, когда всѣ точки механизма движутся не въ одной и той же плоскости, но въ параллельныхъ плоскостяхъ.

**) Зародышъ идеи обращенія механизмовъ имѣется у Шаля. См. Chasles. Aperçu historique sur le developpement des méthodes en Géometrie. III-me éd. Note XXXIV.

разсматривать, представлены на фиг. a, b, c. Фиг. a изображаетъ шарнерный четыреугольникъ; можно сдѣлать неподвижнымъ любое изъ четырехъ его звеньевъ a, b, c, d; такимъ пріемомъ получаемъ четыре разныхъ механизма изъ этой цѣпи.



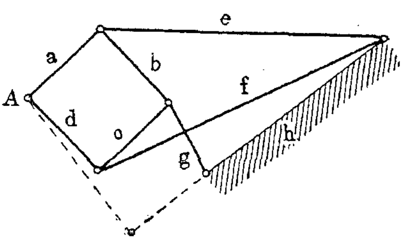
Фиг. a.



Фиг. b.

На фиг. b представлена цѣпь, примѣняемая въ паровыхъ машинахъ: a — кривошипъ, b — шатунъ, c — ползунъ, d — напраляющая линейка. Если сдѣлаемъ неподвижнымъ звено d, то получимъ механизмъ обыкновенной паровой машины. Дѣлая неподвижнымъ звено b, получимъ механизмъ паровой машины съ качающимся цилиндромъ. При неподвижности a или c получаемъ другіе замѣчательные механизмы.

Фиг. c представляетъ инверсоръ Поселье. Въ этой цѣпи восемь звеньевъ: a, b . . . h. Обыкновенно дѣлаются неподвижнымъ звено h, тогда точка A описываетъ прямую (если длина g равна h) или дугу круга (если g не равна h). Вмѣсто h можно сдѣлать неподвижнымъ любое изъ остальныхъ звеньевъ; тогда получимъ различные другіе механизмы.



Фиг. c.

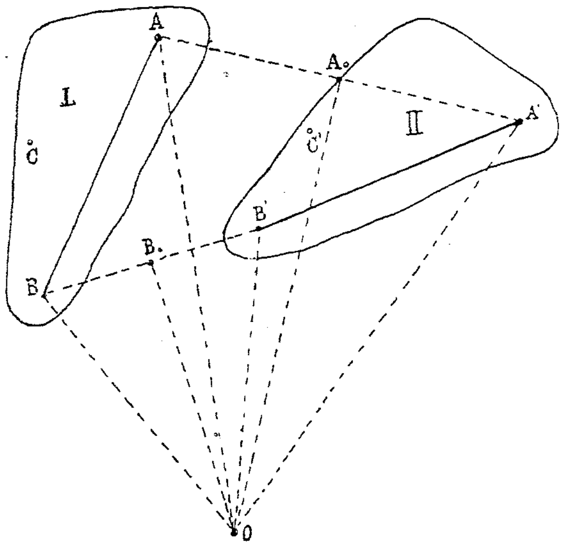
Всѣ механизмы, которые мы разсматриваемъ, представляютъ системы съ полными связями, или другими словами — системы съ одною степенью свободы. То есть они владѣютъ слѣдующими двумя свойствами: a) каждая точка системы движется по совершенно опредѣленной траекторіи; b) когда назначено перемѣщеніе одной точки системы, то этимъ вполнѣ опредѣляются перемѣщенія остальныхъ ея точекъ.

42. *Мгновенные центры.* Всѣ части нашихъ механизмовъ движутся въ одной и той же плоскости. А движеніе неизмѣняемаго тѣла, параллельное нѣкоторой плоскости, подчинено теоремѣ Шаля, которая и будетъ руководить насъ при дальнѣйшихъ выводахъ.

Теорема Шаля *). Какъ извѣстно теорема эта заключается въ слѣдующемъ:

Всякое безконечно малое движеніе неизмѣняемой плоской фигуры въ ея плоскости есть непремѣнно вращеніе около нѣкотораго мгновеннаго центра.

Напомнимъ доказательство этой основной теоремы Кинематической Геометріи. Докажемъ, что если имѣемъ два произвольныхъ положенія I и II какой нибудь фигуры въ ея плоскости (фиг. d), то она можетъ быть переведена изъ перваго по-



Фиг. d.

ложенія во второе помощію вращенія около нѣкотораго центра. Очевидно достаточно показать справедливость этого для двухъ какихъ нибудь точекъ фигуры, напр. A и B. Если вращеніемъ около нѣкотораго центра мы эти точки изъ перваго ихъ положенія передвинемъ такъ, что онѣ совмѣстятся со вторыми ихъ положеніями A′, B′, то и любая точка фигуры C совмѣстится съ новымъ ея положеніемъ C′.

Чтобы найти центръ, вращая около котораго мы перемѣ-

*) Маннгеймъ и Бурместеръ указываютъ, что понятіе о мгновенномъ центрѣ встрѣчается въ наукѣ значительно раньше трудовъ Шаля, а именно въ мемуарахъ Ивана Бернулли и Эйлера. См. Mannheim. Géometrie cinématique p. 14. Burmester. Lehrbuch der Kinematik. I. 27. Бекъ даже находитъ зачатки этого ученія у Аристотеля, въ его „Механическихъ Проблемахъ“. Th. Beck. Beiträge zur Geschichte des Maschinenbaues 96.

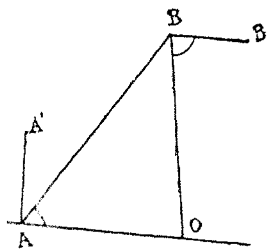
стимъ точки A и B такъ, что онѣ совпадутъ съ A′ и B′, поступимъ слѣдующимъ образомъ: линіи AA′ и BB′ раздѣлимъ пополамъ и изъ точекъ дѣленія возстановимъ перпендикуляры, до встрѣчи ихъ въ O. Эта точка встрѣчи и будетъ искомый центръ. Дѣйствительно, треугольники

$$OAB \text{ и } OA'B'$$

равны, потому что имѣютъ три равныя стороны. Слѣд. вращая около O, мы совмѣстимъ AB съ A′B′.

Это справедливо при всякой величинѣ перемѣщеній, переводящихъ фигуру изъ положенія I во II. Теперь назначимъ, что эти перемѣщенія безконечно малы. Тогда, съ точностью до безконечно малыхъ второго порядка, мы можемъ перемѣщенія замѣнить дугами круговъ, описанныхъ изъ O, или соотвѣтствующими хордами AA′ BB′. Такая замѣна можетъ быть сдѣлана, какъ въ уравненіи выражающемъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній, такъ и при вычисленіи скоростей движенія точекъ фигуры. Итакъ: для этихъ операцій безконечно малое движеніе фигуры можетъ быть замѣнено вращеніемъ около точки O, которая и представляетъ мгновенный центръ *). Въ этомъ и состоитъ теорема Шаля.

43. *Нахожденіе мгновеннаго центра.* Онъ легко получается, если извѣстно направленіе одновременныхъ скоростей двухъ точекъ фигуры. Мгновенный центръ лежитъ на перпендикулярѣ къ направленію скорости. Поэтому если для двухъ точекъ фигуры A, B (фиг. e) имѣемъ направленія ихъ скоростей (или безконечно малыхъ перемѣщеній)



Фиг. e.

AA′ и BB′,

*) Но такая замѣна не можетъ быть допущена при рѣшеніи тѣхъ вопросовъ, при которыхъ необходимо принимать во вниманіе величины 2-го порядка, напр. при нахожденіи ускоренія движенія. Это не слѣдуетъ упускать изъ вида. Одновременныя скорости разныхъ точекъ фигуры будутъ пропорціональны разстояніямъ этихъ точекъ отъ мгновеннаго центра, но ускоренія ихъ не будутъ пропорціональны разстояніямъ отъ этого центра. Указанный нами мгновенный центръ есть центръ перемѣщеній и скоростей, но не ускореній, для которыхъ существуетъ совсѣмъ другой центръ. Мы упоминаемъ объ этомъ, чтобы предупредить ошибку, въ которую легко впасть, если не обратить вниманія на смыслъ теоремы Шаля, опредѣляющійся выводомъ ея, а прямо руководствоваться словеснымъ ея изложеніемъ, поставленнымъ нами въ началѣ доказательства, и понимать его безусловно и безъ всякихъ ограниченій.

то, проводя перпендикуляры къ этимъ скоростямъ, получимъ въ пересѣченіи перпендикуляровъ мгновенный центръ O.

На основаніи теоремы Шаля, всякое безконечно малое перемѣщеніе какой нибудъ части разсматриваемыхъ нами плоскихъ механизмовъ будетъ вращеніе около мгновеннаго центра. Для каждой части (т. е. для каждаго подвижного звена) получаемъ особый мгновенный центръ. Если произведемъ обращеніе механизма, т. е. вмѣсто прежняго неподвижного звена выберемъ другое и его сдѣлаемъ неподвижнымъ, то получимъ новый механизмъ, новое движеніе, и мгновенные центры измѣняются.

Пусть цѣпь имѣетъ n звеньевъ. Любое изъ нихъ можно сдѣлать неподвижнымъ и для этого случая опредѣлить (n—1) мгновенныхъ центровъ остальныхъ звеньевъ. Отсюда слѣдуетъ, что полное число возможныхъ мгновенныхъ центровъ такой цѣпи будетъ

$$n.(n-1).$$

Чтобы разобраться въ этомъ обиліи мгновенныхъ центровъ, установимъ слѣдующее обозначеніе. Всѣ мгновенные центры будемъ обозначать буквою O съ подстрочными знаками. Условимся въ этомъ подстрочномъ знакѣ всегда ставить двѣ буквы: первая изъ нихъ должна обозначать то звено, движеніе котораго изображается мгновеннымъ центромъ; вторая—отмѣчаетъ, какое звено при этомъ сдѣлано неподвижнымъ. Такъ напр. названіе

$$O_{ad}$$

изображаетъ мгновенный центръ, около котораго вращается звено a, когдо звено d—неподвижно. Для крактости можно пропускать букву O, и обозначить это звено знакомъ:

$$ad.$$

Подобно этому означеніе

$$O_{da} \text{ или просто } da$$

обозначаетъ, для того же механизма, центръ, около котораго вращается звено d, когда неподвижнымъ сдѣлано звено a.

Мы докажемъ двѣ общія теоремы относительно мгновенныхъ центровъ, нами разсматриваемыхъ.

44. ***Первая теорема.*** Два мгновенныхъ центра, въ подстрочные знаки которыхъ входятъ однѣ и тѣ же буквы, но въ другомъ порядкѣ, напр.

$$O_{ab} \text{ и } O_{ba},$$

совпадаютъ между собою. Другими словами, порядокъ буквъ въ подстрочныхъ знакахъ безразличенъ.

Эта теорема почти очевидна. O_{ab} означаетъ центръ, около котораго вращается звено a, когда b неподвижно; пусть это будетъ точка A. Разсмотримъ безконечно малое перемѣщеніе, т. е. вращеніе около центра A на безконечно малый уголъ ω. Затѣмъ придадимъ всему механизму, какъ одному цѣлому, вращеніе ω около того же центра A, и на тотъ же уголъ, но въ противуположную сторону. Результатомъ сложенія этихъ двухъ перемѣщеній будетъ слѣдующее: звено a дѣлается неподвижнымъ, звено же b получаетъ вращеніе около A. Слѣд. по нашему обозначенію, теперь точка A дѣлается центромъ

$$O_{ba},$$

т. е. теорема доказана.

Поэтому далѣе мы не будемъ обращать вниманіе на порядокъ буквъ въ подстрочныхъ знакахъ, изображающихъ центры.

Замѣтимъ, что на основаніи нашей теоремы въ общей совокупности

$$n.\ (n-1)$$

мгновенныхъ центровъ механизма, состоящаго изъ n звеньевъ, эти центры будутъ попарно совпадать одно съ другимъ. Слѣдовательно число различныхъ мгновенныхъ центровъ будетъ

$$\frac{n.\ (n-1)}{2}.$$

45. *Вторая теорема* *). Возьмемъ въ какой нибудь кинематической цѣпи три произвольныхъ звена ея: a, b, c и разсмотримъ три мгновенныхъ центра

$$O_{ab},\ O_{bc},\ O_{ac},$$

подстрочные знаки которыхъ

$$ab,\ ac,\ bc,$$

представляютъ различныя соединенія по два изъ трехъ буквъ

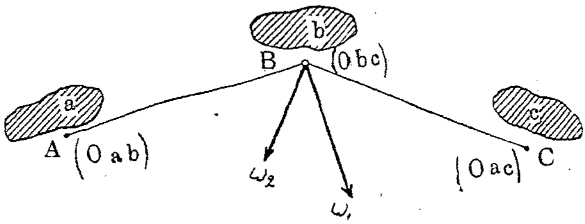
a, b, c.

Эти три мгновенные центра лежатъ на одной прямой.

Для доказательства допустимъ, что эти три центра A, B, C (фиг. 30) не лежатъ на одной прямой, и покажемъ, что такое предположеніе приводитъ къ нелѣпости.

*) Она была найдена независимо другъ отъ друга Аронгольдомъ и Кеннеди.

Сначала предположимъ, что неподвижно звено b, и разсмотримъ точку B, т. е. мгновенный центръ bc, или cb (что все равно, на основанiи первой теоремы). Около B вращается звено b, когда c неподвижно, и обратно около B вращается c, когда неподвижно b. Поэтому точку B можно считать общей



Фиг. 30.

точкой тѣлъ b и c; ее можно разсматривать или принадлежащей тѣлу b, или принадлежащей звену c *); при обоихъ предположенiяхъ она находится въ покоѣ.

Затѣмъ сдѣлаемъ обращенiе механизма; пусть теперь неподвижнымъ будетъ звено a. Чтобы произвести такое обращенiе, нужно всему механизму какъ цѣлому, всѣмъ его частямъ, сообщить, кромѣ прежнихъ движенiй, еще слѣдующее перемѣщенiе: движенiе, которое равно и прямо противоположно прежнему движенiю звена a. При этомъ точка B, которая прежде была неподвижна, теперь получитъ нѣкоторое движенiе, но оно будетъ одно и то же какъ въ случаѣ, когда B считаемъ принадлежащей звену b, такъ и въ томъ случаѣ, если B считаемъ принадлежащей тѣлу c. Такое заключенiе основано на томъ, что прежде точка B въ обоихъ случаяхъ была неподвижна.

Но если тѣло a неподвижно, то для тѣлъ b и c имѣемъ мгновенными центрами точки A и C (т. е. ab, ac). Считая точку B принадлежащей звену b, мы заключаемъ, что она должна вращаться около центра ba, или, что все равно, около центра ab, т. е. около точки A. Безконечно малое перемѣщенiе ω_1 точки B будетъ перпендикулярно къ радiусу AB.

---

*) Конечно нѣтъ необходимости, чтобы точка B въ дѣйствительности, матерiально, принадлежала звеньямъ механизма b, c. Она можетъ находиться совершенно внѣ механизма; но идеально она какъ бы соединена съ этими звеньями. И вообще, всякiй мгновенный центръ можно, съ кинематической точки зрѣнiя, считать соединеннымъ съ соотвѣтствующимъ звеномъ, хотя бы въ дѣйствительномъ, реальномъ, механизмѣ между звеномъ и его центромъ не имѣлось матерiальной связи.

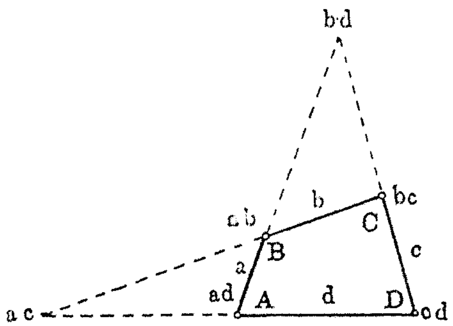
Затѣмъ, продолжая разсматривать то же движеніе нашей цѣпи (по прежнему неподвижно a), будемъ считать точку B принадлежащей звену c. Она должна вращаться около центра ca, или, что все равно, около центра ac, т. е. около точки C. Поэтому она получитъ безконечно малое перемѣщеніе ω_2 перпендикулярное къ радіусу BC.

Итакъ оказывается, что точка B получаетъ различныя перемѣщенія ω_1, ω_2, смотря потому считаемъ ли мы ее принадлежашей звену b или звену c. То есть мы входимъ въ противурѣчіе съ прежде полученнымъ заключеніемъ. Такое логическое противурѣчіе получилось вслѣдствіе невѣрности основного предположенія, что точки A, B, C не лежатъ на одной прямой; невѣрное предположеніе привело насъ къ нелѣпому выводу. Противурѣчіе уничтожается, какъ только примемъ, что точка B лежитъ на прямой AC.

Такимъ образомъ наша теорема, которую будемъ называть теоремой Аронгольда, доказана помощью reductio ad absurdum.

46. *Приложенія этой теоремы.* Она имѣетъ первостепенное значеніе при разысканіи мгновенныхъ центровъ, очень облегчаетъ это разысканіе и часто представляетъ единственное средство для ихъ нахожденія.

Примѣры. Шарнерный четыреугольникъ. Сначала разсмотримъ простую цѣпь, для которой всѣ мгновенные центры могутъ быть легко найдены и безъ помощи этой теоремы, а именно шарнерной четыреугольникъ (фиг. 31), состоящій изъ четырехъ звеньевъ a, b, c, d, соединенныхъ шарнерами A, B, C, D.



Фиг. 31.

Очевидно, каждый изъ этихъ шарнеровъ есть мгновенный центръ для одного изъ двухъ звеньевъ, имъ соединенныхъ, когда другое звено будетъ неподвижно. По нашему обозначенію точки A, B, C, D будутъ мгновенные центры.

ad, ab, bc и cd.

Разсматривая три звена

a, c, d,

мы заключаемъ, по теоремѣ Аронгольда, что центры

ad, cd, ac

должны лежать на одной прямой. Слѣд. неизвѣстный намъ центръ

ae

долженъ лежать на прямой, соединяющей указанные уже центры

ad и cd

т. е. на прямой AD. Затѣмъ, разсматривая прямую BC, соединяющую центры

ab, bc,

заключаемъ, что центръ

ac

долженъ лежать на той же прямой. Итакъ центръ ac получится, какъ пересѣченіе прямыхъ AD и BC.

Подобно этому найдемъ центръ bd, какъ пересѣченіе прямой AB, которая соединяетъ центры

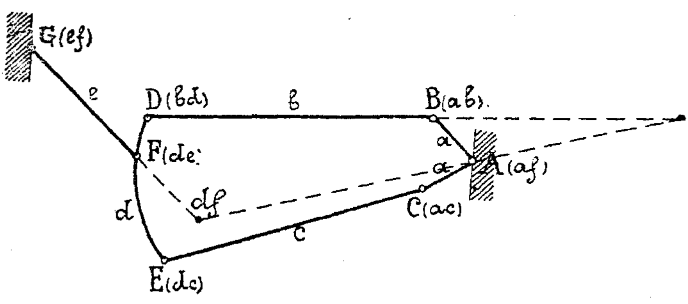
ad, ab

и прямой CD, которая соединяетъ центры

cd, bc.

Полученная нами окончательная фигура представляетъ всѣ мгновенные центры шарнернаго четыреугольника.

47. *Другой примѣръ. Кулиссный механизмъ.* На фиг. 32 изображена схема, представляющая собою обобщеніе механизмовъ, извѣстныхъ подъ названіемъ кулиссъ Стивенсона,



Фиг. 32.

Аллана, Гуча и др.; они приводятся въ дѣйствіе двумя эксцентриками, заклиненными на одномъ валу. Здѣсь первое звено цѣпи есть a; оно изображаетъ собою оба эксцентрика и валъ, на которомъ они заклинены, такъ что составляютъ съ нимъ одно цѣлое. Затѣмъ звенья b и c представляютъ эксцентриковыя тяги; d—сама кулисса, e—тяга, на которой подвѣшена кулисса. Наконецъ, f—есть неподвижное звено, т. е., устой машины, въ которомъ вращается валъ съ эксцентриками (ось вращенія вала означена точкою A). Къ этому же устою въ точкѣ G, подвѣшена тяга e, на которой виситъ кулисса. Звенья этого механизма соединены въ точкахъ

A, B, C, D, E, F, G

шарнерами.

Задача состоитъ въ томъ, чтобы найти мгновенный центръ, около котораго вращается кулисса, при своемъ безконечно маломъ перемѣщеніи.

Прежде всего обозначимъ шарнеры по установленному нами правилу для мгновенныхъ центровъ. Шарнеръ, соединяющій два какихъ-нибудь звена

m и n,

получаетъ обозначеніе

mn.

Слѣд. шарнеры

A, B, C, D, E, F, G

должны быть названы

af, ab, ac, bd, dc, de, ef.

Искомый мгновенный центръ кулиссы долженъ получить обозначеніе

df.

Мы найдемъ его положеніе, примѣняя нѣсколько разъ теорему Аронгольда.

Сначала найдемъ центръ da. Для этого замѣтимъ, что прямая DB соединяетъ центры

bd, ab,

слѣд. на той же прямой лежитъ и центръ da. Также видимъ, что онъ лежитъ на прямой CE, соединяющей

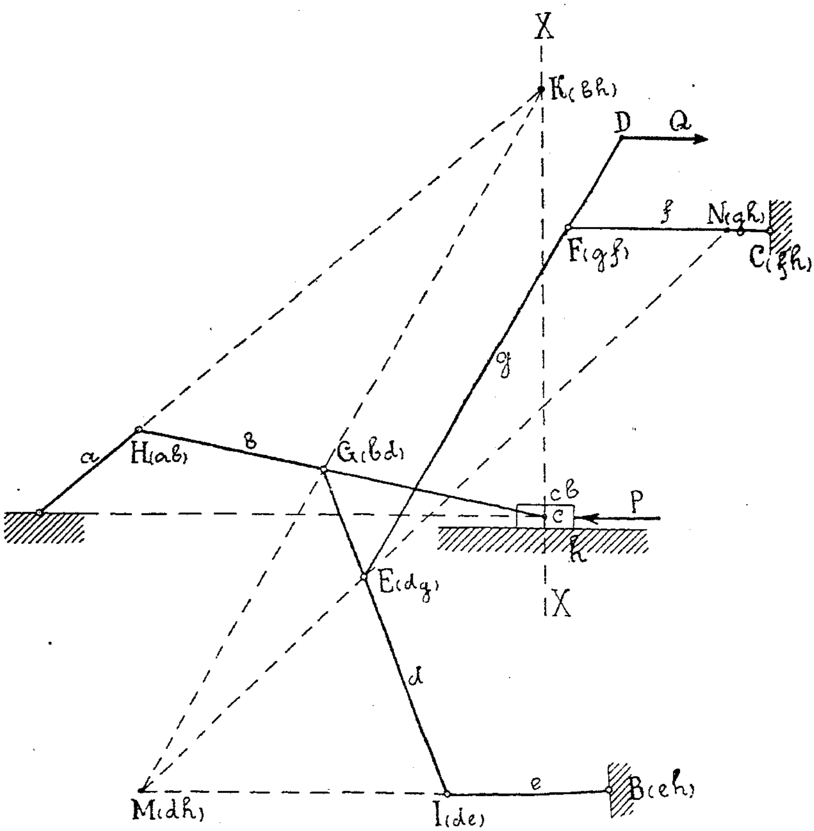
dc, ac.

Слѣд. центръ da получится въ пересѣченіи кулиссныхъ шатуновъ b и c, т. е въ точкѣ K.

Соединимъ этотъ центръ da съ точкой A, т. е. съ центромъ af; на этой прямой долженъ лежать искомый центръ df. Но онъ долженъ лежать также на прямой GF, соединяющей центры ef и ed. Итакъ, искомый мгновенный центръ кулиссы df получится какъ пересѣченіе прямыхъ KA и и GF.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что это построеніе совершенно общее, примѣнимое одинаково, будетъ-ли кулисса изогнутая или прямая (Аллана), будетъ-ли она обращена выпуклостью, какъ показано на чертежѣ (кулисса Стивнсона), или въ обратную сторону (кулисса Гуча), будетъ-ли она подвѣшена концомъ своимъ или какой-нибудь средней точкой.

48. *Третій примѣръ. Кулисса Дэюоя.* Схема ея представлена на фиг. 33. Въ составъ цѣпи входитъ обыкновенный механизмъ паровой машины, т. е. кривошипъ a, шатунъ b, пол-



Фиг. 33.

зунъ c и неподвижный устой машины h, служащій направляющей линейкой для ползуна. Къ этимъ звеньямъ присоединяются части собственно кулиссы, а именно: съ одной изъ точекъ шатуна G соединяется рычагъ d, другой конецъ котораго I направляется отводнымъ радіусомъ e, качающимся около неподвижной точки B. Съ точкой E рычага d соединена кулисса g, направляемая отводнымъ радіусомъ FC, который качается около неподвижной точки C. Кулисса g служитъ для передвиженія золотника, соединяющагося съ точкой D кулиссы. Требуется найти мгновенный центръ для кулиссы, т. е. по нашему обозначенію центръ

gh.

Сначала обозначимъ по нашему правилу всѣ шарнеры, соединяющіе по два звена цѣпи между собою. Точки

A, H, G, E, I, B, F, C

получатъ названія:

ah, ab, bd, dg, de, eh, gf, fh.

Шарнеръ, соединяющій шатунъ b съ ползуномъ c, долженъ быть названъ:

bc.

Затѣмъ найдемъ мгновенный центръ для шатуна b, т. е.

bh.

Его легко построить, какъ пересѣченіе нормалей къ путямъ, описываемымъ двумя его концами. Лѣвый конецъ шатуна движется по кругу, описываемому кривошипомъ, слѣд. этотъ кривошипъ есть нормаль къ пути лѣваго конца. Правый конецъ ходитъ по прямолинейной линейкѣ h, слѣд. перпендикуляръ XX къ этой линейкѣ будетъ нормаль къ пути праваго конца шатуна. Искомый мгновенный центръ bh получится въ точкѣ K, гдѣ встрѣчается продолженіе кривошипа съ перпендикуляромъ XX.

Далѣе начинаемъ примѣнять теорему Аронгольда. Линія KG соединяетъ центры

bh и bd,

слѣд. на той же прямой лежитъ центръ dh. Онъ же долженъ лежать на прямой BI, соединяющей

de съ eh.

Слѣд. центръ dh строится, какъ пересѣченіе KG съ BI.

Наконецъ находимъ требуемый центръ кулиссы

gh.

Онъ долженъ лежать на пересѣченіи прямыхъ:

ME, которая соединяетъ dh съ dg,

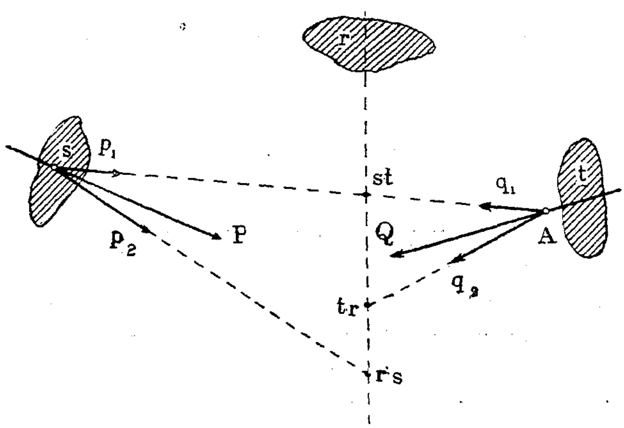
и

FC, которая соединяетъ центры gf и fh.

Задача. Построить мгновенные центры для инверсора Поселье.

49. *Условія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на звенья механизма.* Знаніе мгновенныхъ центровъ для звеньевъ позволяетъ легко опредѣлить эти условія. Конечно они получатся изъ Начала Возможныхъ Перемѣщеній, какъ общаго закона равновѣсія всевозможныхъ системъ; мгновенные центры нужны для того, чтобы знать возможныя перемѣщенія.

Сначала разсмотримъ случай, когда имѣемъ только двѣ силы P и Q, дѣйствующія на два различныхъ звена s, t (фиг. 34) и взаимно уравновѣшивающіяся.



Фиг. 34.

Пусть неподвижное звено нашей цѣпи будетъ r. Построимъ три мгновенныхъ центра, отвѣчающіе звеньямъ

s, t, r,

то есть

rs, tr, st.

Эти три точки будутъ лежать на одной прямой.

Силу P, дѣйствующую на звено s, разложимъ на двѣ составляющія p_1 и p_2, направленныя въ центры

ts, rs,

т. е. центры, имѣющіе букву s въ своемъ названіи. Эти точки можемъ считать принадлежащими тѣлу s, составляющими съ нимъ одно цѣлое, участвующими въ его безконечно маломъ перемѣщеніи. Составляющая p_2 идетъ въ неподвижную точку rs тѣла s, слѣд. работа ея для безконечно малаго перемѣщенія будетъ равна нулю, и въ уравненіе возможныхъ перемѣщеній будетъ входить только работа силы p_1, для безконечно малаго перемѣщенія точки st.

Перейдемъ теперь къ тѣлу t и силѣ Q. Продолжимъ p_1 до встрѣчи ея въ A съ силой Q, перенесемъ Q въ точку A и разложимъ ее на составляющій q_1, q_2, направленныя въ центры st, tr, т. е. въ центры, имѣющіе букву t въ своемъ названіи и принадлежащіе тѣлу t. Слагающая q_2, идущая въ неподвижную точку тѣла t, даетъ возможную работу, равную нулю, и остается только работа слагающей q_1, для перемѣщенія точки st, принадлежащей тѣлу t.

Примѣняя теперь Начало Возможныхъ Перемѣщеній, мы должны написать, что для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы сумма работъ силъ p_1 и q_1 для перемѣщеній точекъ ихъ приложенія была равна нулю. Но мы вели построеніе такъ, что оставшіяся слагающія p_1 и q_1 могутъ быть разсматриваемы какъ приложенныя къ точкѣ st, т. е. къ общей точкѣ звеньевъ s и t. Каково бы ни было перемѣщеніе этой точки, оно остается одно и то-же, какъ въ случаѣ, когда мы разсматриваемъ точку st принадлежащей тѣлу s, такъ и въ случаѣ, когда мы разсматриваемъ ее принадлежащей тѣлу t. Слѣд. для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы слагающія p_1 и q_1 были численно равны между собою и направлены одна противуположно другой. Тогда сумма работъ ихъ будетъ равна нулю.

Такимъ образомъ, пользуясь нашимъ построеніемъ, всегда можемъ узнать уравновѣшиваются ли наши силы P, Q или нѣтъ. А также можемъ, зная силу P, приложенную къ звену s, найти, какая сила Q должна быть приложена къ звену s, чтобы уравновѣсить силу P.

Совершенно ясно, что здѣсь вовсе не требуется и не нужно, чтобы самыя силы P и Q были равны и прямо противуположны. Это было бы необходимо, если бы обѣ онѣ были приложены къ одному и тому же твердому тѣлу. Но въ нашемъ вопросѣ необходимо и достаточно, чтобы были равны и противуположны слагающія p_1, q_1, идущія въ общую для обоихъ звеньевъ точку st. Притомъ разложеніе силъ должно быть такъ сдѣлано, чтобы другія слагающія p_2, q_2 проходили черезъ неподвижныя точки тѣхъ тѣлъ, къ которымъ эти слагающія приложены.

50. *Замѣна силы, дѣйствующей на одно звено механизма силой, приложенной къ какому нибудь другому звену.* Теперь мы легко найдемъ какъ должна быть сдѣлана такая замѣна, чтобы при этомъ равновѣсіе не нарушилось. Пусть имѣемъ механизмъ, находящійся въ равновѣсіи. Изъ всѣхъ силъ къ нему приложенныхъ выберемъ одну P, дѣйствующую на звено s. Мы желаемъ замѣнить силу P другой силой, приложенной къ звену t.

Для нахожденія этой замѣняющей силы, сначала найдемъ, помощію построенія предъидушаго n°, такую силу Q, которая, будучи приложена къ звену t, уравновѣшиваетъ силу P. Очевидно равновѣсіе нашего механизма не измѣнится, если къ числу силъ его прибавимъ двѣ равныя и противуположныя силы

$$Q, -Q,$$

дѣйствующія на одно и то-же звено t. Но разсматривая теперь совокупность силъ

$$P, Q, -Q,$$

видимъ, что двѣ изъ нихъ

$$P, Q$$

взаимно уравновѣшиваются и могутъ быть отброшены. Остается одна сила

$$-Q,$$

дѣйствующая на звено t. Она замѣнила первоначально данную силу P, приложенную къ другому звену s, причемъ равновѣсіе не нарушилось.

Итакъ, мы рѣшили задачу, поставленную въ заглавіи этого n°. Въ ученіи о равновѣсіи механизмовъ она соотвѣтствуетъ такой задачѣ Статики твердаго тѣла: силу, дѣйствующую въ точкѣ A тѣла, перенести въ точку B, безъ измѣненія равновѣсія.

51. *Общее условіе равновѣсія произвольнаго числа силъ, дѣйствующихъ на звенья механизма.* Эту задачу всего лучше рѣшить слѣдующимъ образомъ:

Выберемъ одно произвольное звено механизма и перенесемъ на него безъ измѣненія равновѣсія, какъ только что было показано, всѣ силы, дѣйствующія на всѣ звенья механизма. Тогда будемъ имѣть совокупность силъ, дѣйствующихъ на одно и то-же звено, т. е. на одно и то-же твердое тѣло.

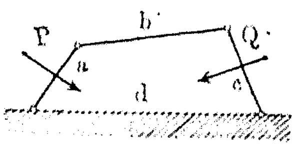
Равновѣсіе механизма этимъ путемъ приводится къ болѣе простой и знакомой намъ задачѣ: равновѣсію силъ, дѣйствующихъ на одно и то-же тѣло. По правиламъ Статики твердаго тѣла, замѣнимъ всѣ эти силы одной равнодѣйствующей.

Для равновѣсія механизма необходимо и достаточно, чтобы найденная равнодѣйствующая проходила черезъ мгновенный центръ того звена, къ которому она приложена.

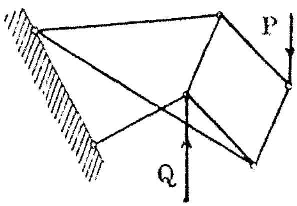
Въ этомъ и заключается общее рѣшеніе вопроса о равновѣсіи плоскихъ механизмовъ.

Читатель видитъ, что въ этой бесѣдѣ для плоскихъ механизмовъ выведены правила перенесенія силъ, правила сложенія и разложенія ихъ, условія равновѣсія, и всѣ эти вопросы рѣшены въ томъ же духѣ и въ той же полнотѣ, какъ это давно было сдѣлано для твердаго тѣла.

Задачи. A) Найти условія равновѣсія силъ P, Q (фиг. 35),



Фиг. 35.



Фиг. 36.

дѣйствующихъ на звенья a, c шарнернаго четыреугольника. B) Найти условія равновѣсія силъ P, Q (фиг. 36) на инверсорѣ Поселье. C). Въ кулиссѣ Джоя (фиг. 33) найти условія равновѣсія между давленіемъ на поршень P и сопротивленіемъ золотника передвиженію Q.

ТРЕТЬЯ БЕСѢДА.

Опредѣленіе силъ связи.

52. Въ первой бесѣдѣ мы видѣли что, если для составленія условій равновѣсія примѣняемъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній, то всѣ силы связи исключаются, и мы можемъ совершенно игнорировать ихъ: для условій равновѣсія онѣ не нужны.

Но иногда бываетъ необходимо знать силы связи для другихъ цѣлей. Въ техническомъ дѣлѣ, при построеніи машинъ и мостовъ, силы связи часто представляютъ давленія на опоры, и ихъ нужно знать для расчета прочности и устойчивости опоръ. Въ машинахъ силы связи, появлающіяся въ формѣ давленій на валы и другія подвижныя части, вызываютъ треніе, величина котораго иногда зависитъ отъ величины давленія. Поэтому нужно знать силы связи, чтобы вычислить величину тренія и опредѣлить степень полезнаго дѣйствія машины.

Но и въ тѣхъ случаяхъ, когда нужно знать силы связи, нельзя сказать, что исключеніе силъ связи, произведенное помощію Начала Возможныхъ Перемѣщеній, было безполезно. Напротивъ того оно и здѣсь приноситъ большую пользу, а именно тѣмъ, что раздѣляетъ сложный вопросъ на два вопроса, рѣшаемые отдѣльно: а) опредѣленіе условій равновѣсія, т. е. нахожденіе такихъ внѣшнихъ силъ, которыя уравновѣшиваются въ системѣ, b) опредѣленіе силъ связи. Если бы рѣшали оба эти вопроса сразу безъ раздѣленія, то имѣли бы задачу съ большимъ числомъ связанныхъ между собою неизвѣстныхъ. А извѣстно, что математическія трудности сильно возрастаютъ съ увеличеніемъ числа неизвѣстныхъ, связанныхъ между собою. Всякое раздѣленіе неизвѣстныхъ на двѣ или большее число независимыхъ группъ влечетъ за собою значительное облегченіе вопроса. Начало Возможныхъ Перемѣщеній и производитъ именно такое раздѣленіе.

Кромѣ того и для рѣшенія занимающаго насъ теперь вопроса—опредѣленія силъ связи—наилучшимъ пріемомъ послужитъ примѣненіе Начала Возможныхъ Перемѣщеній.

Въ первой бесѣдѣ мы примѣняли наше Начало къ перемѣщеніямъ, дозволяемымъ всѣми связями системы, т. е. къ такимъ перемѣщеніямъ, которымъ связи нисколько не препятствуютъ; поэтому всѣ связи исключались. Если теперь желаемъ найти силы связи, то необходимо разсматривать перемѣщенія, которымъ препятствуютъ нѣкоторыя связи, напр., хотя бы одна изъ связей. Уничтожимъ мысленно эту связь и замѣнимъ ее силой, которая и будетъ сила связи.

Эту силу причислимъ къ внѣшнимъ силамъ. Затѣмъ вообразимъ такое перемѣщеніе, которому эта связь препятствовала, и которое теперь, съ уничтоженіемъ связи, сдѣлалось возможнымъ. Остается примѣнить Начало Возможныхъ Перемѣщеній, и мы получимъ уравненіе, въ которое входитъ искомая сила связи.

Этотъ пріемъ очень удобенъ, потому это позволяетъ опредѣлять не всѣ неизвѣстныя сразу, въ совокупности, а раздѣлять ихъ на группы съ небольшимъ числомъ неизвѣстныхъ въ каждой группѣ. Часто даже возможно достигнуть полнаго раздѣленія неизвѣстныхъ, т. е. такъ подобрать перемѣщенія, что въ каждой группѣ будетъ входить только одна неизвѣстная сила связи.

53. *Примѣры.* Возьмемъ случай связаннаго твердаго тѣла. Положимъ, оно имѣетъ одну неподвижную точку. Здѣсь связь т. е. дѣйствіе опорной точки на тѣло, выражается одной силой, проходящей черезъ неподвижную точку; величина и направленіе этой силы неизвѣстны. Мы будемъ знать эту силу вполнѣ, если опредѣлимъ три ея проекціи на координатныя оси X, Y, Z.

Уничтожимъ связь нашего тѣла и замѣнимъ ее тремя силами X, Y, Z, которыя причислимъ къ внѣшнимъ силамъ. Пока существовала связь, она не дозволяла тѣлу двигаться поступательно; теперь такое движеніе сдѣлалось возможнымъ. Вообразимъ, что тѣло получило поступательное перемѣщеніе по оси X—овъ, и напишемъ, что сумма работъ всѣхъ внѣшнихъ силъ равна нулю для этого перемѣщенія; получимъ уравненіе, въ которое будетъ входить одна неизвѣстная X, которую и найдемъ. Тѣмъ же пріемомъ опредѣлимъ отдѣльно силы Y и Z.

54. *Другой примѣръ.* Положимъ, имѣемъ твердое тѣло, у котораго двѣ опоры, т. е. двѣ неподвижныя точки A и B, опредѣляющія ось вращенія AB. Опишемъ нѣсколько подробнѣе эти опоры. Пусть опора A такова, что не препятствуетъ дви-

женію вдоль оси AB, а уничтожаетъ только перемѣщенія перпендикулярныя къ AB. Слѣд. здѣсь сила связи, проходящая черезъ точку A, не имѣетъ слагающей X, параллельной оси AB; остаются только двѣ слагающія Y_1, Z_1, перпендикулярныя къ AB. Что касается опоры B, то пусть она препятствуетъ не только перемѣщеніямъ, перпендикулярнымъ къ оси AB, но и перемѣщенію вдоль этой оси. (При практическомъ выполненіи этой опоры здѣсь придется поставить какой нибудь опорный подшипникъ). Итакъ сила связи въ точкѣ B имѣетъ три слагающія, по направленію координатныхъ осей X (совпадающей съ AB), Y и Z — перпендикулярныхъ къ AB. Эти слагающія назовемъ X_2, Y_2, Z_2.

Всего имѣемъ пять неизвѣстныхъ силъ связи

$$Y_1,\ Z_1,\ X_2,\ Y_2,\ Z_2.$$

Уничтожимъ опоры A,B и вмѣсто нихъ введемъ эти силы связи. Теперь наше тѣло свободно и можетъ имѣть любое поступательное и вращательное перемѣщеніе; всѣ они для него дозволены. Мы можемъ подобрать перемѣщенія такъ, что неизвѣстныя вполнѣ раздѣлятся, и въ каждое уравненіе будетъ входить только одна неизвѣстная.

Прежде всего вообразимъ поступательное перемѣщеніе вдоль оси X. Примѣняя къ нему Начало Возможныхъ Перемѣщеній, получимъ уравненіе, въ которое входитъ одна сила X_2.

Далѣе разсмотримъ вращеніе около оси, проведенной черезъ B параллельно оси Y. Примѣняя Начало къ этому перемѣщенію, исключимъ всѣ неизвѣстныя, кромѣ Z_1.

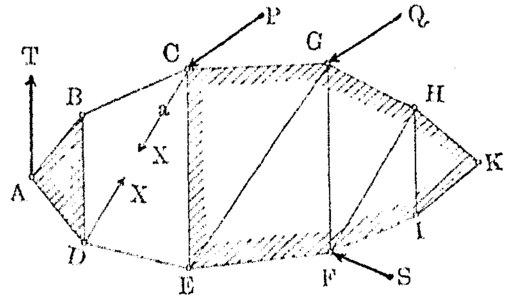
Затѣмъ беремъ вращеніе около оси, проведенной черезъ B параллельно оси Z. Это перемѣщеніе дастъ намъ уравненіе, содержащее одну неизвѣстную Y_1.

Разсматривая вращенія около осей, проведенныхъ черезъ точку A параллельно Y и Z, получимъ еще два уравненія, и первое изъ нихъ содержитъ неизвѣстную Z_2, а второе—Y_2.

55. *Примѣръ изъ Строительной Механики.* При устройствѣ мостовъ, стропилъ и т. п. конструкцій часто примѣняются фермы, т. е. раскосныя системы, связанныя изъ нѣсколькихъ брусковъ; примѣръ приведенъ на фиг. 40. Отдѣльные бруски фермы представляютъ связи этой системы. При дѣйствіи внѣшнихъ нагрузокъ на ферму, въ этихъ брускахъ появятся внутреннія напряженія, растягивающія или сжимающія; это будутъ

силы связи. Ихъ нужно знать для того, чтобы возможно было расчитать прочные размѣры брусковъ.

Если мы будемъ разсматривать равновѣсіе всей фермы какъ одного цѣлаго, то всѣ силы связи исключаются, и ни въ одно изъ уравненій равновѣсія не попадетъ ни одна изъ силъ связи; въ уравненіяхъ будутъ фигурировать только внѣшнія нагрузки. Поэтому такія уравненія не пригодны для опредѣленія напряженій брусковъ, изъ которыхъ составлена ферма. Чтобы найти эти напряженія, нужно уничтожить одну или нѣсколько связей, мысленно разрѣзать ихъ; вмѣсто связи вводимъ силу, представляющую напряженіе бруска. Эта сила должна быть причислена къ внѣшнимъ силамъ.



Фиг. 40.

При разрѣзаніи связей, мы получаемъ нѣкоторыя новыя перемѣщенія, которыя прежде не дозволялись, а теперь становятся возможными. Къ этимъ новымъ перемѣщеніямъ и нужно примѣнить Начало Возможныхъ Перемѣщеній; получимъ уравненія, въ которыя входятъ силы связи; слѣд. эти силы могутъ быть найдены. Въ этомъ заключаются пріемы для нахожденія внутреннихъ напряженій въ фермахъ.

Положимъ, имѣемъ ферму, не содержащую лишнихъ брусковъ, т. е. такую, что всѣ бруски ея необходимы для приданія фермѣ жесткости. Какъ только разрѣзанъ одинъ брусокъ, сейчасъ ферма теряетъ свою жесткость и получаетъ возможность измѣнять свою фигуру, безъ измѣненія длины всѣхъ остальныхъ брусковъ.

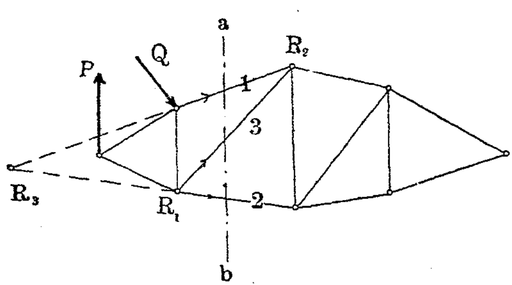
Положимъ (фиг. 40), мы разрѣзаемъ брусокъ a и вводимъ вмѣсто этой связи силы X, идущія по длинѣ бруска. Ферма теряетъ свою жесткость; въ ней теперь имѣется шарнерный четыреугольникъ BCED *), который можетъ измѣнять свою фигуру, а при этомъ измѣненіи получаютъ перемѣщенія и другія части фермы. Вотъ это и есть то перемѣщеніе, которое сдѣлалось дозволеннымъ съ уничтоженіемъ связи a; къ нему нужно примѣнить Начало Возможныхъ Перемѣщеній. Силы X

*) Мы предполагаемъ, что во всѣхъ узлахъ фермы соединенія шарнерныя.

войдуть въ это уравненіе вмѣстѣ съ остальными внѣшними силами P, Q, R, S. Напряженіе остальныхъ брусковъ исключаются какъ силы связи. Поэтому получимъ уравненіе, въ которое входить только одна неизвѣстная X; изъ него найдемъ эту силу.

Тѣмъ же пріемомъ найдемъ напряженія остальныхъ брусковъ. Такъ какъ каждый изъ нихъ необходимъ для жесткости фермы, то достаточно разрѣзать одинъ брусокъ, чтобы появилось нѣкоторое дозволенное перемѣщеніе, измѣняющее фигуру фермы; для него и составимъ уравненіе равновѣсія. Такимъ образомъ въ каждое уравненіе будетъ входить только одна неизвѣстная,—напряженіе того бруска, который разрѣзанъ; всѣ прочія неизвѣстныя исключаются. Это исключеніе происходитъ во время самаго составленія уравненія, вслѣдствіе того, что мы примѣняемъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній. Пользуясь этимъ Началомъ, мы получаемъ рядъ отдѣльныхъ уравненій, содержащихъ каждое по одной неизвѣстной, т. е. получаемъ самое простое рѣшеніе. Если бы имѣли нѣсколько совокупныхъ уравненій, т. е. такихъ, что въ одно уравненіе входитъ нѣсколько неизвѣстныхъ, то рѣшеніе было бы гораздо сложнѣе. Понадобилось бы исключать неизвѣстныя помощію алгебраическихъ пріемовъ. А когда число неизвѣстныхъ значительное, то такое исключеніе очень утомительно.

56. *Способъ Риттера.* Этотъ пріемъ часто примѣняется при инженерныхъ расчетахъ. Вотъ въ чемъ онъ состоитъ: разрѣжемъ ферму (фиг. 41) на двѣ части разрѣзомъ ab и будемъ разсматривать равновѣсіе лѣвой отрѣзанной части. При разрѣзѣ мы уничтожаемъ три связи, производимыя брусками 1, 2, 3, и вмѣсто нихъ вводимъ силы, идущія по направленію этихъ брусковъ; ихъ причисляемъ къ внѣшнимъ силамъ, такъ что на лѣвую часть фермы дѣйствуютъ силы



Фиг. 41.

$$P,\ Q,\ 1,\ 2,\ 3.$$

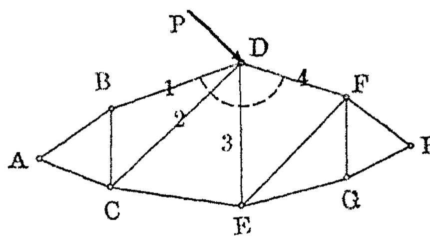
Вслѣдствіе уничтоженія связей лѣвая часть фермы получаетъ возможность перемѣщаться въ плоскости чертежа, какъ неизмѣняемая фигура; слѣд. къ числу возможныхъ перемѣщеній ея относятся вращенія около любой изъ точекъ плоскости фигуры. Для нахожденія силы 1 вообразимъ слѣдующее возможное перемѣщеніе: вращеніе около точки R_1, гдѣ встрѣчаются двѣ остальныя неизвѣстныя 2, 3. Примѣнимъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній для этого вращенія, т. е. напишемъ уравненіе равновѣсія моментовъ для точки R_1. Силы 2, 3 исключаются изъ этого уравненія, потому что онѣ проходятъ черезъ точку R_1 и даютъ для нея моментъ, равный нулю. Мы получаемъ одно уравненіе съ одной неизвѣстной 1.

Чтобы найти силу 2, разсмотримъ перемѣщеніе, состоящее во вращеніи около точки R_2, въ которой встрѣчаются двѣ другія неизвѣстныя 1, 3. Получимъ уравненіе моментовъ для точки R_2, изъ котораго исключаются силы 1, 3, дающія для R_2 моменты, равные нулю. Опять имѣемъ одно уравненіе съ одной неизвѣстной.

Наконецъ для нахожденія силы 3 разсматриваемъ вращеніе около точки R_3, гдѣ встрѣчаются силы 1, 2.

Такимъ образомъ при этомъ пріемѣ получается исключеніе неизвѣстныхъ во время самаго составленія уравненій равновѣсія Мы достигаемъ этого помощію выбора тѣхъ перемѣщеній, къ которымъ примѣняется общая теорема равновѣсія. Въ результатѣ получаемъ три отдѣльныхъ уравненія, и каждое изъ нихъ содержитъ только одну неизвѣстную.

57. ***Способъ отрѣзыванія узловъ.*** Этотъ способъ также часто примѣняется при расчетѣ фермъ. Здѣсь уничтожаютъ сразу всѣ тѣ связи, которыя представляются брусками, сходящимися въ одномъ узлѣ. Этотъ узелъ дѣлается свободнымъ, и можно разсматривать его равновѣсіе. Напр., для узла D (фиг. 42) нужно разрѣзать четыре бруска 1, 2, 3, 4 и замѣнить ихъ силами, которыя причислимъ къ внѣшнимъ силамъ. Если начнемъ съ узла A и будемъ послѣдовательно отрѣзать узлы въ порядкѣ буквъ



Фиг. 42.

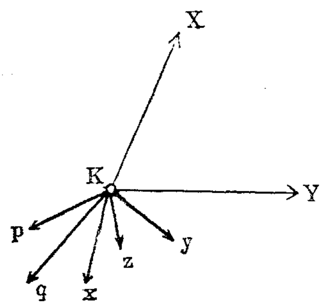
$$B, C, D, E \ldots,$$

то въ каждомъ узлѣ будемъ имѣть только двѣ неизвѣстныя силы связи.

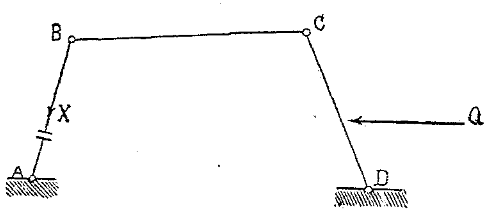
Пусть K (фиг. 43) одинъ изъ узловъ; p, q, r — извѣстныя силы, x, y — неизвѣстныя. Для нахожденія ихъ разсмотримъ слѣдующія перемѣщенія, возможныя для узла K, который сдѣлался свободнымъ, вслѣдствіе уничтоженія связей.

a) Чтобы найти неизвѣстную силу x, вообразимъ для узла K перемѣщеніе по направленію X, перпендикулярному къ другой неизвѣстной силѣ y. Другими словами, напишемъ, что сумма проекцій всѣхъ силъ на ось X равна нулю. Въ это уравненіе не войдетъ сила y; она исключится во время составленія уравненія, которое будетъ содержать только одну неизвѣстную x.

b) Чтобы найти неизвѣстную y, вообразимъ себѣ, что точка



Фиг. 43.



Фиг. 43a.

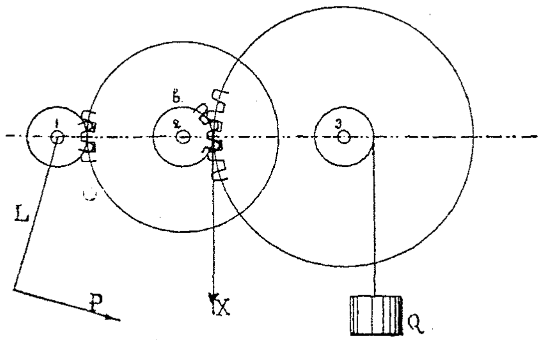
K получила перемѣщеніе по направленію Y, перпендикулярному къ другой неизвѣстной x. Эта послѣдняя исключается во время составленія уравненія равновѣсія, и опять получимъ уравненіе, содержащее только одну неизвѣстную.

Еще примѣры. Имѣемъ шарнерную систему (фиг. 43a) ABCD; шарнеры A и D соединены съ неподвижнымъ устоемъ. Къ звеньямъ BC, DC приложены силы, уравновѣшивающіяся на этомъ механизмѣ. Мы желаемъ опредѣлить силу связи X, дѣйствующую по бруску AB.

Уничтожимъ эту связь, разрѣзавши брусокъ AB, и замѣнимъ ее силой X. Съ уничтоженіемъ связи въ системѣ оказываются новыя возможныя перемѣщенія, которыя прежде не дозволялись. Напримѣръ теперь возможно вращеніе бруска BC около точки C, при неподвижности бруска CD. Вотъ къ этому перемѣщенію и примѣнимъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній. Это приведетъ къ составленію уравненія равновѣсія рычага BC, имѣющаго опору въ C и подверженнаго дѣйствію внѣшнихъ силъ, включая X въ ихъ число. Отсюда найдемъ X.

Вотъ другой пріемъ для нахожденія силы X. Съ уничтоженіемъ связи AB мы получаемъ для нашей системы еще слѣдующее возможное перемѣщеніе: бруски BC и CD могутъ, не измѣняя своего взаимнаго расположенія, поворачиваться около оси D. Примѣнимъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній къ этому движенію; другими словами, напишемъ уравненіе равновѣсія рычага BCD, для котораго D есть ось вращенія и къ которому приложены внѣшнія силы со включеніемъ X въ ихъ число. Изъ этого уравненія найдемъ X.

С и л ы с в я з и в ъ в о р о т ѣ с ъ з у б ч а т о й п е р е д а ч е й (фиг. 43 b). Сила P, дѣйствующая на рукоятку L, уравновѣши-



Фиг. 43b.

ваетъ грузъ Q, подвѣшенный къ барабану ворота; между осью рукоятки и осью ворота имѣется зубчатая передача. Мы видѣли, что для этой системы получается условіе равновѣсія, содержащее только силы P и Q, а всѣ давленія опоръ на оси вращенія и всѣ давленія между зубцами сцѣпленныхъ колесъ — исключаются. Теперь желаемъ найти давленіе X, которое передается отъ зубьевъ большого колеса на зубцы колеса b.

Для этого уничтожимъ связь между этими колесами, т. е. мысленно представимъ себѣ, что зубцы колеса b сломаны. Вслѣдствіе этого дѣлается возможнымъ нѣкоторое перемѣщеніе, которое прежде не дозволялось. А именно теперь возможно вращеніе осей 1 и 2 при неподвижности оси 3. Примѣняя Начало Возможныхъ Перемѣщеній къ этому движенію, получимъ искомую силу X.

ЧЕТВЕРТАЯ БЕСѢДА.

Даламберово Начало.

58. Во главу Динамики нужно поставить такъ называемое Даламберово Начало—общую теорему, которая указываетъ, какъ должны быть составлены уравненія движенія для всякой механической системы. Эта теорема была найдена Даламберомъ, который замѣтилъ, что законы движенія и уравненія движенія похожи на законы равновѣсія и уравненія равновѣсія. Теорема и высказываетъ, въ чемъ именно состоитъ это сходство.

Мы проще всего придемъ къ ней, если начнемъ съ разсмотрѣнія равновѣсія и движенія одной свободной (несвязанной) матеріальной точки. Все касающееся одной точки получается съ наибольшимъ удобствомъ, если мы введемъ три координатныя оси X, Y, Z и будемъ разлагать на эти оси какъ силы, такъ и движеніе.

Сначала предположимъ, что точка находится въ равновѣсіи; необходимыя и достаточныя условія для равновѣсія заключаются въ томъ, что суммы проекцій силъ, приложенныхъ къ ней, должны быть нулями для каждой изъ координатныхъ осей. Обозначая суммированіе знакомъ Σ, получимъ эти условія въ формѣ:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma X = 0\\ \Sigma Y = 0\\ \Sigma Z = 0\end{array}\right\} \quad (8).$$

Перейдемъ теперь къ движенію, которое разложимъ на три движенія по тремъ осямъ координатъ. Назовемъ массу точки черезъ m, а перемѣнныя координаты ея черезъ x, y, z. Эти величины будутъ представлять перемѣщенія для трехъ составныхъ движеній, направленныхъ по осямъ. Вторыя производныя этихъ перемѣщеній, взятыя по времени

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^7},$$

будутъ ускоренія трехъ составныхъ движеній, направленныхъ по координатнымъ осямъ. Мы будемъ примѣнять Ньютоново обозначеніе, которое очень удобно и состоитъ въ слѣдующемъ: производная по времени отъ какой нибудь величины a будетъ изображаться точкой, поставленной надъ a; вторая же производная изобразится двумя точками надъ той же буквой a. Тогда наши ускоренія по координатнымъ осямъ обозначатся черезъ:

$$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Но мы знаемъ, что ускореніе прямолинейнаго движенія равно силѣ, дѣйствующей по направленію движенія, раздѣленной на массу точки. Слѣд. ускоренія для нашихъ трехъ прямолинейныхъ движеній будутъ:

$$\frac{1}{m}.\Sigma X, \frac{1}{m}\Sigma Y, \frac{1}{m}\Sigma Z.$$

Приравнивая эти послѣднія величины выраженіямъ (9), изображающимъ тѣ же ускоренія, получимъ:

$$\frac{1}{m}.\Sigma X = \ddot{x}$$

$$\frac{1}{m}.\Sigma Y = \ddot{y}$$

$$\frac{1}{m}.\Sigma Z = \ddot{z}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X - m\ddot{x} = 0\\ \Sigma Y - m\ddot{y} = 0\\ \Sigma Z - m\ddot{z} = 0\end{aligned}\right\} (10).$$

Это будутъ уравненія движенія матеріальной точки. Они похожи на уравненія равновѣсія (8) и различаются отъ нихъ лишь прибавочными членами:

$$-m\ddot{x}, -m\ddot{y}, -m\ddot{z}.$$

Условіе однородности формулъ указываетъ, что эти прибавочные члены должны быть одинаковаго измѣренія съ силами; въ томъ же можно убѣдиться и разсматривая измѣренія множителей m и $\ddot{x}$. Итакъ на эти члены можно смотрѣть какъ на нѣкоторыя силы, конечно фиктивныя, несуществующія, но введеніе такихъ воображаемыхъ силъ представитъ намъ большія удобства. Мы ихъ называемъ силами инерцiи; можно разсматривать или отдѣльно силы инерцiи для каждой изъ координатныхъ осей, или полную силу инерцiи, т. е. результатъ геометрическаго сложенiя трехъ частныхъ силъ инерцiи, идущихъ по осямъ координатъ. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ сила инерцiи численно равна произведенiю массы на ускоренiе, а знакъ минусъ указываетъ, что сила инерцiи направлена всегда противуположно ускоренiю движенiя.

Введя такое понятiе о силахъ инерцiи, мы еще болѣе подчеркиваемъ сходство между уравненiями равновѣсiя (8) и уравненiями движенiя (10). Отъ (8) переходимъ къ (10), прибавляя къ внѣшнимъ силамъ еще силы инерцiи. И такъ уравненiя движенiя матерiальной точки получаются изъ уравненiй равновѣсiя помощiю прибавки силъ инерцiи къ внѣшнимъ силамъ.

59. Разсмотримъ теперь не одну матерiальную точку, а произвольную механическую систему. Раздѣлимъ ее на отдѣльныя матерiальныя точки, и для каждой точки введемъ, кромѣ внѣшнихъ силъ, еще и всѣ силы связи. Тогда каждая матерiальная точка можетъ считаться свободной, и къ ней можно примѣнить вышеуказанныя уравненiя равновѣсiя (8) и уравненiя движенiя (10). Уравненiя равновѣсiя будутъ имѣть форму:

$$\Sigma X + \Sigma X_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

гдѣ X обозначаетъ внѣшнiя силы, а X_1—силы связи и внутреннiя взаимодѣйствiя. Для каждой точки будемъ имѣть три такихъ уравненiя, соотвѣтственно тремъ координатнымъ осямъ, и вся совокупность такихъ уравненiй для всѣхъ точекъ опредѣляетъ условiя равновѣсiя системы.

Уравненiя движенiя точки будутъ отличаться отъ (11) только прибавкой силъ инерцiи и получатъ форму

$$\Sigma X + \Sigma X_1 - m\ddot{x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Ихъ тоже будетъ по три уравненiя на каждую матерiальную точку.

Условiя равновѣсiя системы представляютъ слѣдствiя всей совокупности уравненiй (11) и могутъ быть получены изъ этой совокупности исключенiемъ силъ связи. Каковы бы ни были прiемы, которые нужно примѣнить для такого исключенiя, во всякомъ случаѣ эти прiемы могутъ быть примѣнены для той же цѣли и къ совокупности уравненiй (12). Слѣдовательно, какое бы уравненіе равновѣсія мы ни получили, всегда можно найти соотвѣтствующее ему уравненіе движенія, отличающееся отъ уравненія равновѣсія только прибавкой силъ инерціи. Въ этомъ и состоитъ Начало Даламбера, которое мы выскажемъ слѣдующими словами:

Всѣ законы равновѣсія, всѣ теоремы равновѣсія, всѣ уравненія равновѣсія могутъ быть примѣнены къ нахожденію движенія системы. Для этого нужно только въ условіяхъ равновѣсія прибавить силы инерціи, и тогда мы получимъ законы, теоремы и уравненія, относящіеся къ движенію системы.

Такимъ образомъ Даламберово Начало приводитъ задачи Динамики, вопросы о движеніи, къ болѣе простымъ задачамъ Статики, вопросамъ о равновѣсіи. Умѣя рѣшать статическія задачи, мы получаемъ въ Даламберовомъ Началѣ общее правило рѣшенія вопросовъ о движеніи.

До Даламбера не имѣли такого общаго правила и рѣшали вопросы о движеніи системъ частными пріемами, придумываемыми ad hoc, особо для каждаго отдѣльнаго вопроса. Притомъ и число разрѣшенныхъ вопросовъ о движеніи системъ было очень не велико; напр. Гюйгенсъ рѣшилъ вопросъ о качаніяхъ сложнаго маятника. Только съ Даламбера начинается Динамика системы.

60. Замѣтимъ, что, пользуясь Началомъ Даламбера, мы получаемъ законы движенія въ очень разнообразныхъ формахъ соотвѣтственно разнообразію законовъ равновѣсія. Законы, даваемые Статикой, могутъ имѣть или форму словесныхъ правилъ, или теоремъ, или получаются въ видѣ геометрическихъ построеній, или наконецъ въ формѣ аналитическихъ уравненій. Вводя силы инерціи въ эти теоремы, построенія, уравненія и т. д., мы примѣняемъ ихъ къ случаю движенія.

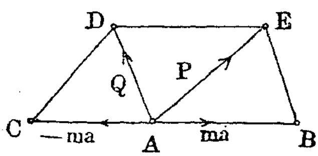
Во многихъ случаяхъ условія равновѣсія получаются всего удобнѣе примѣненіемъ Начала Возможныхъ Перемѣщеній; эта теорема поэтому имѣетъ особое значеніе и для Динамики и постоянно примѣняется для нахожденія уравненій движенія. Мы можемъ сказать, что общее правило нахожденія уравненій движенія заключается въ комбинированіи Начала Даламбера съ Началомъ Возможныхъ Перемѣщеній. Примѣняя это послѣднее Начало, мы исключаемъ всѣ силы связи; слѣдовательно онѣ не войдутъ въ уравненія движенія, которыя будутъ содержать только внѣшнія силы и силы инерціи, т. е. ускоренія движенія.

61. *Другое доказательство Даламберова Начала.* Для выясненія основныхъ законовъ и теоремъ очень полезно

подходить къ нимъ съ разныхъ точекъ зрѣнія и доказывать ихъ помощью разнородныхъ соображеній. Поэтому мы предложимъ еще другое доказательство основной теоремы Динамики, а именно изложимъ тѣ соображенія, которыя приводитъ самъ Даламберъ для оправданія Начала, получившаго его имя.

При этомъ доказательствѣ не будемъ уничтожать связи и раздѣлять одну отъ другой матеріальныя точки, составляющія систему. Сохранимъ всѣ связи и будемъ разсматривать всю связанную систему въ совокупности, назначивши внѣшнія силы, которыя дѣйствуютъ на разныя точки системы.

Конечно эти силы сообщатъ точкамъ связанной системы совсѣмъ другія движенія, чѣмъ тѣ, которыя получились бы отъ тѣхъ же внѣшнихъ силъ, при дѣйствіи ихъ на совокупность не связанныхъ, свободныхъ матеріальныхъ точекъ. Пусть A (фиг. 44) — одна изъ этихъ точекъ, имѣющая массу m, AE представляетъ равнодѣйствующую P внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ A. Если бы A была свободна, то она получила бы ускореніе по направленію силы P, равное частному



Фиг. 44.

$$\frac{P}{m}.$$

Вслѣдствіе связей, точка m получаетъ нѣкоторое другое ускореніе a, направленное не по AE, а иначе, напр., по AB. Произведеніе массы точки m на ускореніе a представляетъ величину той внѣшней силы, которая должна была бы дѣйствовать на точку A, по направленію AB, чтобы сообщить точкѣ A дѣйствительное ускореніе a, если бы точка A была вполнѣ свободна и ничѣмъ не связана. Построимъ параллелограммъ ABED, и замѣнимъ силу AE, т. е. P, двумя слагающими AB и AD; первая изъ нихъ имѣетъ величину

$$ma,$$

вторую же назовемъ черезъ Q. Итакъ сила P можетъ быть замѣнена совокупностью этихъ двухъ слагающихъ. Если бы точка A была свободна, то ускореніе ея получилось бы какъ геометрическая сумма двухъ ускореній, вызываемыхъ силами ma и Q отдѣльно; таковъ основной законъ Динамики, установленный Ньютономъ и называемый закономъ независимости совокупнаго дѣйствія силъ, или иначе закономъ параллелограмма силъ.

Вслѣдствіе связи, точка m получаемъ только ускореніе a по направленію AB; выходитъ, что какъ будто бы только одна слагающая ma производитъ свое дѣйствіе; другая же сила Q какъ будто бездѣйствуетъ, теряется, не произведя никакого ускоренія въ точкѣ m. Таковъ результатъ связей системы и вліяніе ихъ на движеніе точки A; нѣкоторая сила Q какъ будто теряется, отчего она и называется потерянной силой.

Сказанное о точкѣ A относится и ко всѣмъ другимъ точкамъ системы; для каждой изъ нихъ получится потерянная сила, соотвѣтствующая нашей силѣ Q. И такъ для связанной системы имѣемъ цѣлую совокупность потерянныхъ силъ, которыя не производятъ ускореній, исчезаютъ безъ видимаго дѣйствія. Такое исчезновеніе ихъ есть результатъ связей, и очевидно потерянныя силы уравновѣшиваются связями системы.

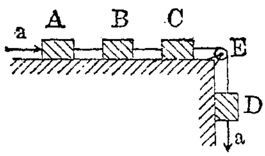
Потерянная сила Q можетъ быть найдена помощію параллелограмма ABED, который мы построили. Но удобнѣе находить ее иначе. Для этого на нашей фигурѣ, имѣя уже точки ADE, построимъ новый параллелограммъ AEDC. Сторона его AC будетъ равна AB, но направлена въ противоположную сторону. Ее можно разсматривать какъ силу, которая равна произведенію изъ массы точки m, умноженной на дѣйствительное ускореніе ея a. Направленіе этой силы прямо противуположно направленію дѣйствительнаго ускоренія a. Изъ этого описанія видимъ, что сила AC представляетъ то, что мы называли силой инерціи матеріальной точки m. Изъ параллелограмма ACDE, видно, что потерянная сила Q есть равнодѣйствующая внѣшней силы $AE = P$ и силы инерціи AC. Такое опредѣдѣленіе даетъ наиболѣе удобное правило для нахожденія потерянныхъ силъ.

Итакъ изъ разсмотрѣнія связанной системы мы получили, что: при движеніи системы потерянныя силы (т. е. равнодѣйствующія изъ внѣшнихъ силъ и силъ инерціи) уравновѣшиваются на связахъ системы. Т. е. мы опять пришли къ Началу Даламбера; при этомъ выводѣ становится вполнѣ яснымъ исключеніе силъ связи.

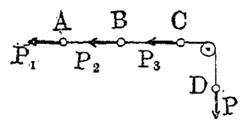
62. *Примѣры.* Сдѣлаемъ нѣсколько простыхъ примѣровъ, чтобы выяснить какъ на основаніи Даламберова Начала получаются уравненія движенія.

Первый примѣръ (фиг. 45). Нѣсколько грузовъ A, B, C, соединены гибкой, нерастяжимой нитью и приводятся въ движеніе по поверхности горизонтальнаго стола. Для этого нить перекинута черезъ блокъ E, и къ концу ея подвѣшенъ грузъ D, который и служитъ движущей силой.

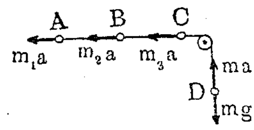
Сначала разсмотримъ условія равновѣсія этой системы. Возьмемъ ту же гибкую нить (фиг. 46) и приложимъ къ ней въ точкахъ A, B, C горизонтальныя силы P_1, P_2, P_3, а въ



Фиг. 45.



Фиг. 46.



Фиг. 47.

точкѣ D вертикальную силу P. Условіе, необходимое и достаточное для равновѣсія, заключается въ слѣдующемъ:

$$P_1 + P_2 + P_3 = P.$$

Въ нашей движущейся системѣ назовемъ массы грузовъ A, B, C черезъ m_1, m_2, m_3, а массу D черезъ m. Здѣсь имѣется единственная внѣшняя сила—вѣсъ груза D равный

$$mg,$$

гдѣ g—ускореніе силы тяжести. Чтобы получить силы инерціи, предположимъ, что масса D получаетъ ускореніе a, направленное внизъ. Тогда, вслѣдствіе нерастяжимости нити, массы A, B, C получатъ такія же ускоренія, идущія въ правую сторону. Силы инерціи этихъ четырехъ массъ идутъ въ сторону, противуположную ускоренію, слѣд. получается совокупность силъ, изображенныхъ на фиг. 47. Условіе равновѣсія ихъ будетъ

$$m_1a + m_2a + m_3a = mg - ma,$$

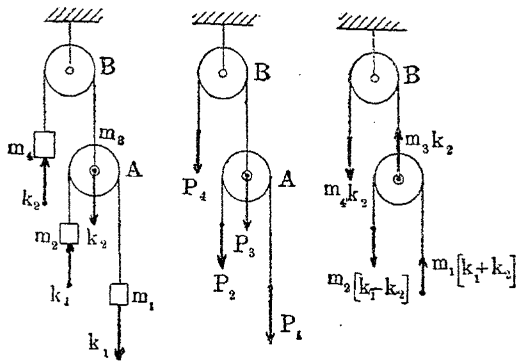
откуда получаемъ величину ускоренія

$$a = g.\ \frac{m}{m + m_1 + m_2 + m_3}\ .$$

Эта величина постоянная, слѣдовательно движеніе будетъ равноускоренное.

63. *Второй примѣръ.* Имѣемъ два блока A и B (фиг. 48), оснащенные слѣдующимъ образомъ: черезъ блокъ A перекинуна гибкая нить, на концахъ которой повѣшены грузы; другая нить перекинутая черезъ блокъ B, несетъ на одномъ своемъ концѣ (лѣвомъ) грузъ, а къ правому концу ея подвѣшена ось блока A; ось блока B неподвижна.

Этотъ механизмъ есть система съ двумя степенями свободы. Условія равновѣсія на немъ заключаются въ слѣдующемъ



Фиг. 48. Фиг. 49. Фиг. 50.

(фиг. 49): a) Силы P_1 и P_2, дѣйствующія на концы нити, перекинутой черезъ блокъ A, должны быть равны между собою:

$$P_1 = P_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

b) Сумма трехъ силъ P_1, P_2, P_3, приложенныхъ къ правому концу той нити, которая перекинута черезъ блокъ A, должна равняться силѣ P_4, дѣйствующей на лѣвый конецъ той же нити:

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_4 \; . \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Переходя теперь къ движенію, назовемъ массы грузовъ и массу блока A буквами

$$m_1, m_2, m_4, m_3,$$

какъ означено на фиг. 48. Для простоты, пренебрежемъ вращеніемъ блоковъ A и B, т. е. силами инерціи, возбуждающимися отъ такого вращенія. Пусть ускореніе блока A направлено книзу и равно k_2; тогда ускореніе груза m_4 будетъ направлено кверху и, вслѣдствіе нерастяжимости нити, величина этого ускоренія будетъ тоже k_2. Ускореніе груза m_1, относительно блока A, пусть направлено книзу и равно k_1; тогда для груза m_2 получаемъ то же относительное ускореніе, направленное кверху.

Полное ускореніе m_1 будетъ направлено внизъ и равно

$$k_1 + k_2;$$

а для m_2 полное ускореніе, направленное кверху, будетъ

$$k_1 - k_2.$$

Умножая эти ускоренія на массы, получимъ величины силъ инерціи, которыя по опредѣленію всегда идутъ противоположно ускореніямъ. Слѣд. получимъ картину силъ инерціи, показанную на фиг. 50.

Внѣшнія силы въ нашей системѣ представляются вѣсами грузовъ и блока A; эти силы получаются, умножая массы на ускореніе g силы тяжести. Всѣ четыре внѣшнія силы направлены внизъ.

Примѣняя теперь условія равновѣсія (13) и (14) къ совокупности внѣшнихъ силъ и силъ инерціи, получимъ два уравненія:

$$m_1 g - m_1 (k_1 + k_2) = m_2 g + m_2 (k_1 - k_2) \quad . \ . \ . \ . \ . \ (15)$$

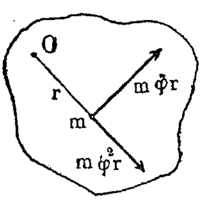
$$m_1 g - m_1 (k_1 + k_2) + m_2 g + m_2 (k_1 + k_2) + m_3 g - m_3 k_2 =$$
$$m_4 g + m_4 k_2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (16).$$

Эти два уравненія дадутъ ускоренія k_1, k_2. Какъ то, такъ и другое оказываются постоянными, слѣд. движеніе равноускоренное.

64. *Третій примѣръ. Вращеніе твердаго тѣла около неподвижной оси.* Мы знаемъ, что для равновѣсія такого тѣла необходимо и достаточно выполненіе одного условія:

сумма моментовъ внѣшнихъ силъ относительно оси вращенія должна быть равна нулю.

Пусть M означаетъ такую сумму моментовъ. Для нахожденія уравненія движенія нужно къ M прибавить еще сумму моментовъ силъ инерціи и результатъ сложенія приравнять нулю. Посмотримъ, каковы будутъ здѣсь силы инерціи.



Фиг. 51.

Вращеніе считаемъ положительнымъ, когда оно направлено по часовой стрѣлкѣ (фиг. 51. O—ось вращенія). Уголъ поворота тѣла отъ начальнаго его положенія назовемъ φ. Тогда угловая скорость будетъ представляться первой производной угла φ по времени,

$$\frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \dot{\varphi}.$$

Вторая же производная того же угла

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \ddot{\varphi}.$$

даетъ угловое ускореніе. Оно будетъ положительное, если направлено по часовой стрѣлкѣ.

Какая нибудь матеріальная частица m, входящая въ составъ нашего тѣла и находящаяся на разстояніи r отъ оси вращенія, будетъ имѣть скорость равную

$$r.\dot{\varphi}$$

и ускореніе равное

$$r.\ddot{\varphi}.$$

Силы инерціи при этомъ движеніи будутъ двоякаго рода: a) центробѣжныя, идущія по радіусу отъ центра, b) касательныя, идущія по перпендикуляру къ радіусу, въ сторону, противоположную касательному ускоренію, т. е. противоположную направленію вращенія, если угловое ускореніе положительное. Для частицы m величины этихъ силъ будутъ:

$$m\,\dot{\varphi}^2 r \text{ и } m\ddot{\varphi}r.$$

Направленія ихъ означены на чертежѣ; при этомъ мы считаемъ, что $\ddot{\varphi}$ положительное; при отрицательномъ значеніи $\ddot{\varphi}$ измѣнится направленіе касательной силы инерціи.

Всѣ центробѣжныя силы пересѣкаютъ ось вращенія, и слѣд. моменты равны нулю. Касательная сила частицы m даетъ моментъ

$$mr^2\ddot{\varphi},$$

который нужно взять со знакомъ минусъ, согласно постоянному условію относительно знака моментовъ; этотъ моментъ при положительномъ ускореніи стремится вращать тѣло противъ часовой стрѣлки, поэтому получаетъ отрицательный знакъ.

Нужно взять моменты касательныхъ силъ инерціи для всѣхъ частицъ, составляющихъ наше тѣло, и сложить эти моменты. Означая сложеніе знакомъ Σ, получимъ сумму такихъ моментовъ

$$-\Sigma m.\ \ddot{\varphi} r^2.$$

Но въ этой суммѣ всѣ члены имѣютъ общій множитель $\ddot{\varphi}$, который можно вынести изъ подъ знака суммы; тогда получимъ

$$-\ddot{\varphi}\,\Sigma mr^2.$$

У насъ получилось выраженіе

$$\Sigma mr^2,$$

имѣющее слѣдующее значеніе: нужно взять массу каждой частицы, умножить ее на квадратъ разстоянія до оси вращенія и просуммировать такія выраженія, распространяя суммированіе на все тѣло.

Такое выраженіе, постоянно появляющееся во всѣхъ вопросахъ о вращеніи твердаго тѣла, называется **моментомъ инерціи** тѣла относительно оси вращенія. Назовемъ его для краткости одной буквой

$$I.$$

Итакъ сумма моментовъ силъ инерціи равна

$$-\ddot{\varphi} I.$$

Прибавляя сюда моментъ внѣшнихъ силъ M, мы должны, на основаніи Начала Даламбера, приравнять результатъ нулю. Получимъ уравненіе движенія:

$$M - \ddot{\varphi} I = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (16),$$

которое даетъ величину угловаго ускоренія. Если напр. моментъ внѣшнихъ силъ постоянный, то угловое ускореніе тоже окажется постояннымъ, т. е. движеніе будетъ равноускоренное.

Вообще же угловое ускореніе будетъ

$$\ddot{\varphi} = \frac{M}{I} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (17),$$

т. е. равно частному отъ раздѣленія момента внѣшнихъ силъ на моментъ инерціи вращающагося тѣла.

Слѣдуетъ замѣтить аналогію этого уравненія съ тѣмъ, которое даетъ ускореніе прямолинейнаго движенія матеріальной точки. Если сила, идущая по направленію движенія, есть P, а масса движущейся точки m, то ускореніе прямолинейнаго движенія будетъ

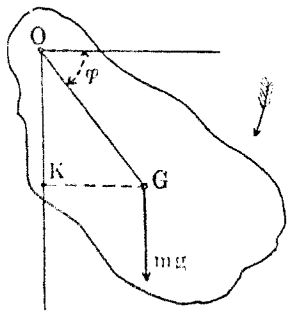
$$a = \frac{P}{m}.$$

Сравнивая съ (17), видимъ, что при переходѣ отъ ускоренія прямолинейнаго движенія матеріальной точки къ угловому ускоренію твердаго тѣла, вращающагося около постоянной оси, нужно сдѣлать слѣдующія замѣны:

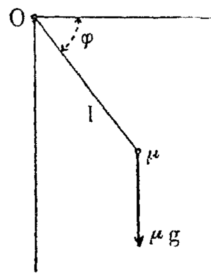
вмѣсто силы P—поставить сумму моментовъ M внѣшнихъ силъ относительно оси вращенія;

вмѣсто массы точки m—поставить моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія. Этотъ моментъ играетъ во вращательномъ движеніи ту же роль, что масса въ прямолинейномъ движеніи точки, или въ поступательномъ движеніи твердаго тѣла.

65. *Четвертый примѣръ. Сложный маятникъ* (фиг. 52). Сложный маятникъ есть твердое тѣло произвольной формы, качающееся около горизонтальной оси подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса. И такъ мы здѣсь имѣемъ вращеніе твердаго тѣла, около неподвижной оси, слѣд. должны примѣнить только что полученное уравненіе (17). Внѣшняя движущая сила здѣсь есть вѣсъ



Фиг. 52.



Фиг. 53.

тѣла, который нужно считать приложеннымъ въ центрѣ тяжести его G. Назовемъ массу всего тѣла черезъ m и разстояніе GO центра тяжести отъ оси вращенія черезъ a. Моментъ вѣса относительно оси вращенія будетъ равенъ вѣсу mg, умноженному на длину GK, т. е.

$$mg.\ a.\ \mathrm{Cos}\ \varphi.$$

Подставляя такой моментъ въ (16), получимъ уравненіе движенія маятника

$$mga\ \mathrm{Cos}\ \varphi - \ddot{\varphi}.I = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} = \frac{mga}{I}.\mathrm{Cos}\ \varphi\ .\ .\ .\ .\ (18).$$

Чтобы уяснить себѣ это уравненіе, перейдемъ отъ сложнаго маятника къ простому, т. е. вмѣсто большаго числа связанныхъ матеріальныхъ частицъ возьмемъ одну матеріальную точку μ, находящуюся на разстояніи l отъ оси вращенія (фиг. 53). Для примѣненія предыдущаго уравненія къ простому маятнику нужно сдѣлать замѣны:

m замѣнить черезъ μ
a . . . . l,

и вмѣсто момента инерціи I вставить произведеніе изъ μ на квадратъ разстоянія l этой точки до оси вращенія. Получимъ для простого маятника уравненіе:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mu.g.l}{\mu l^2}. \operatorname{Cos} \varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l}. \operatorname{Cos} \varphi. \ldots \ldots \ldots (19).$$

Если будетъ удовлетворено условіе

$$l = \frac{I}{ma},$$

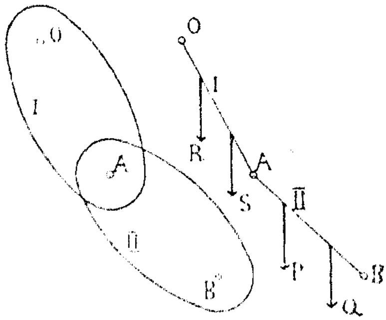
то уравненія (18) и (19) дѣлаются вполнѣ тождественными, т. е. они изображаютъ совершенно одинаковыя колебанія. И такъ длина l простого маятника, качающагося въ унисонъ со сложнымъ, представляется выраженіемъ

$$\frac{I}{ma},$$

въ которомъ I моментъ инерціи сложнаго маятника относительно оси качанія, m его масса; a—разстояніе центра тяжести отъ оси качанія.

66. ***Отсутствіе силъ связи въ уравненіяхъ движенія.*** Въ разсмотрѣнныхъ примѣрахъ, представляющихъ связанныя системы, дѣйствуютъ силы связи. Сюда относятся натяженія гибкихъ нитей и давленія на оси блоковъ перваго и второго примѣровъ, а въ третьемъ и четвертомъ примѣрахъ всѣ молекулярныя взаимодѣйствія между частицами твердаго тѣла и давленія на ось вращенія или на ось качанія маятника. Ни одна изъ этихъ многочисленныхъ неизвѣстныхъ не входитъ въ наши уравненія движенія; всѣ силы связи исключаются уже самымъ способомъ составленія уравненій движенія, т. е. примѣненіемъ Начала Возможныхъ Перемѣщеній. Это самый простой путь, онъ даетъ наиболѣе простыя уравненія движенія. Дѣйствуя иначе, мы получимъ уравненія, содержащія силы связи; конечно эти силы могутъ быть потомъ исключены изъ уравненій, алгебраическими пріемами, но это требуетъ сложныхъ и продолжительныхъ выкладокъ. Поэтому всегда слѣдуетъ предпочитать такой пріемъ, при которомъ силы связи исключаются во время самаго составленія уравненій движенія.

Для образца разсмотримъ двойной маятникъ (фиг. 54); первый маятникъ вращается около неподвижной оси O, а второй маятникъ соединенъ съ первымъ осью A. Здѣсь давленія на оси O и A представляютъ силы связи. Правильный способъ рѣшенія этого вопроса заключается въ слѣдующемъ: разсмотримъ условія равновѣсія этой системы (фиг. 55); ихъ очевидно два: a) сумма моментовъ внѣшнихъ силъ P, Q . . . , приложенныхъ ко второму маятнику, относительно оси A, должна быть равна нулю; b) сумма моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ [какъ тѣхъ (P, Q), которыя приложены ко второму маятнику, такъ и тѣхъ



Фиг. 54. Фиг. 55.

(R, S), которыя приложены непосредственно къ первому маятнику], для оси O должна быть равна нулю. Эти два условія даютъ два уравненія для нашей системы, которая имѣетъ двѣ степени свободы. Если въ этихъ уравненіяхъ къ внѣшнимъ силамъ прибавить силы инерціи, то получимъ уравненія движенія.

Вмѣсто этого простѣйшаго способа рѣшенія иногда примѣняютъ слѣдующій: вводятъ силы связи, т. е. давленія на оси O, A. Такъ какъ неизвѣстны ни величина давленія, ни его направленіе, то имѣемъ для каждой оси двѣ неизвѣстныя. Приходится ввести для каждаго давленія двѣ его проекціи на координатныя оси X, Y, лежащія въ плоскости чертежа. Такимъ образомъ входятъ четыре неизвѣстныя силы связи. Введя ихъ, далѣе разсматриваемъ маятники OA и AB какъ два отдѣльныхъ свободныхъ тѣла, движеніе которыхъ параллельно плоскости чертежа. Уравненія движенія каждаго изъ этихъ тѣлъ пишемъ отдѣльно. И здѣсь эти уравненія будутъ ничто иное какъ условія равновѣсія, со введеніемъ силъ инерціи. Но тѣло OA освобождено отъ связи O; сохранено только условіе, что движеніе происходитъ параллельно плоскости чертежа. Поэтому для OA имѣемъ три условія равновѣсія; суммы проекцій силъ на оси X, Y должны быть нулями, и сумма моментовъ силъ для оси, перпендикулярной къ плоскости чертежа, должна быть нулемъ. Слѣд. получимъ для OA три уравненія движенія. Также и для тѣла AB получимъ три уравненія движенія. Всего имѣемъ шесть уравненій движенія; въ нихъ входятъ четыре неизвѣстныя силы связи, а именно двѣ проекціи давленія оси O и двѣ проекціи давленія оси A. Исключая эти четыре неизвѣстныя изъ шести уравненій, мы получимъ два уравненія движенія, не содержащія связей, при томъ тѣ же самыя два уравненія, которыя могли бы получить сразу и непосредственно, не вводя силъ связи. Очевидно такое введеніе сильно усложнило выводъ *), при томъ безъ всякой нужды.

67. Даламберово Начало даетъ намъ уравненія движенія, въ которыя входятъ силы инерціи, т. е. уравненія содержащія въ себѣ ускоренія движенія. А такъ какъ ускоренія представляются вторыми производными отъ пути по времени, то слѣд. эти уравненія будутъ дифференціальныя второго порядка. Для разрѣшенія вопроса необходимо проинтегрировать такія уравненія, что иногда можетъ представить значительныя и даже непреодолимыя трудности. Въ этомъ отношеніи Даламберово Начало не даетъ никакой помощи, и останавливается на полученіи дифференціальнаго уравненія. Интеграла оно не даетъ и не даетъ никакихъ указаній на способъ интегрированія, не облегчаетъ полученіе интеграла.

Вообще всѣ общія теоремы Динамики можно раздѣлить на два разряда, которые мы назовемъ модели и интегралы. Теоремы второго разряда даютъ одинъ или нѣсколько интеграловъ уравненій движенія; примѣромъ ихъ будетъ законъ живыхъ силъ, или иначе интегралъ живыхъ силъ. Теоремы перваго разряда не даютъ интеграловъ, но приводятъ сложный вопросъ къ болѣе простой модели. Таково Даламберово Начало, которое вопросъ о движеніи замѣняетъ простымъ вопросомъ о равновѣсіи.

Этой замѣной Даламберово Начало бросаетъ яркій свѣтъ на явленія движенія и сразу непосредственно объясняетъ многое въ этомъ явленіи.

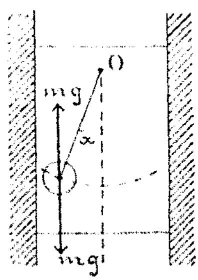
68. Простѣйшія заключенія, даваемыя Даламберовымъ Началомъ, для насъ теперь представляются почти аксіомами. Но не всегда было такъ и интересно прослѣдить, какъ постепенно вырабатывалось понятіе о различіи между законами равновѣсія и законами движенія. Для этого нужно обратиться къ самому зарожденію Динамики, т. е. къ „Разговорамъ Галилея“. Укажемъ напримѣръ на слѣдующее мѣсто: Симпличіо отстаиваетъ мнѣніе Аристотеля, что тяжелыя тѣла должны падать

*) Такъ поступаетъ, напр., H. Lorentz въ своей Technische Mechanik.

быстрѣе легкихъ; соображенія его приводятся къ слѣдующему: если мы на одинъ камень наложимъ другой, то этимъ производимъ на первый добавочное давленіе, и слѣдовательно скорость перваго камня должна увеличиться. Сальвіати, который въ „Разговорахъ" представляетъ мнѣнія самого Галилея, вполнѣ правильно указываетъ, что такое добавочное давленіе получается только при покоѣ, а во время паденія второй камень вовсе не давитъ на первый *).

68. Попробуемъ, вооружившись Даламберовымъ Началомъ, посмотрѣть на нѣсколько обыденныхъ явленій.

Падающій маятникъ. Отклонивъ маятникъ отъ вертикальнаго положенія (фиг. 56), пустимъ его падать вмѣстѣ съ доской, поддерживающей ось маянника. Произойдетъ свободное паденіе всего прибора, съ ускореніемъ тяжести g. Примѣняя Начало Даламбера, мы должны кромѣ вѣса маятника mg, направленнаго внизъ, приложить къ нему еще силу инерціи, которая въ этомъ случаѣ оказывается тоже равной mg и направлена вверхъ. Эти двѣ силы взаимно уничтожаются, и слѣд. грузъ, повѣшенный на нити маятника, теряетъ свое стремленіе качаться взадъ и впередъ около оси O. Если начальная скорость груза была равна нулю, то онъ во все время паденія останется отклоненнымъ на тотъ же уголъ α, на который былъ первоначально отклоненъ. Если при началѣ паденія маятникъ получилъ нѣкоторый толчокъ, то уголъ α будетъ измѣняться, но во всякомъ случаѣ падающій маятникъ теряетъ свое стремленіе стать вертикально и теряетъ свойство изохронныхъ колебаній.

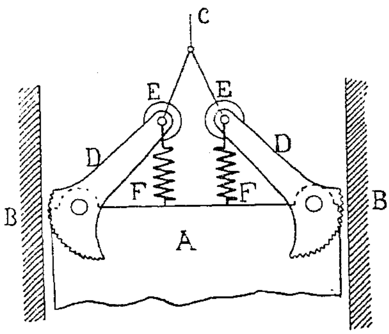


Фиг. 56.

69. *Парашюты подъемниковъ.* Машины, поднимающія людей въ шахтахъ, всегда снабжаются парашютомъ, т. е. приспособленіемъ, которое дѣйствуетъ въ случаѣ разрыва подъемнаго каната и, упершись въ деревянныя стойки шахты, останавливаетъ клѣтку, несущую людей, и не позволяетъ ей упасть съ большой высоты. Попробуемъ устроить парашютъ, такъ какъ показано на фиг. 57. A — клѣть, внутри которой стоятъ поднимаемые люди; B — деревянныя, направляющія стойки по стѣнамъ шахты; C — подъемный канатъ. Онъ прикрѣпляется къ верху клѣти

*) См. Разговоры Галилея въ Ostwald's Klassiker № 11, S. 58.

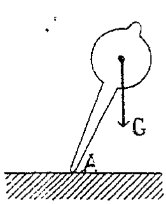
не прямо, а черезъ посредство рычаговъ D, точки опоры которыхъ укрѣплены на крышѣ клѣти. При подъемѣ канатъ вытянутъ, поэтому рычаги становятся въ наклонное положеніе, показанное на чертежѣ, не задѣваютъ стойки B и не мѣшаютъ



Фиг. 57.

подъему. Нужно, чтобы, при разрывѣ подъемнаго каната, рычаги пришли въ горизонтальное положеніе, съ силой ударились въ стойки и вцѣпились въ нихъ своими зубцами. Тогда клѣть повиснетъ на стойкахъ, и не случится несчастія съ людьми. Попробуемъ для полученія такого поворота рычаговъ поставить на концахъ ихъ тяжелые противовѣсы E. Разборъ движенія падающаго маятника, только что сдѣланный нами, примѣнимъ и къ настоящему случаю и ясно показываетъ, что такіе противувѣсы не принесутъ никакой пользы. При разрывѣ каната начнется свободное паденіе клѣти, и при этомъ противувовѣсы E теряютъ свою способность стремиться внизъ и съ большой силой поворачивать рычаги. Такимъ образомъ здѣсь противувѣсы, даже очень тяжелые, окажутся безполезными, и вмѣсто нихъ нужно поставить сильныя пружины или рессоры F.

70. ***Волчокъ.*** (фиг. 58). Часто находятъ пародоксальнымъ, что вращающійся волчокъ не падаетъ, не смотря на наклонное положеніе его оси, при которомъ вѣсъ волчка стремится опро-



Фиг. 58.

кинуть его, вращая около точки A. Здѣсь дѣлаютъ ошибку, перенося соображеніе, заимствованное изъ Статики, цѣликомъ и безъ поправки, на явленія Динамики; при этомъ дѣлаютъ заключеніе, что опрокидывающая пара, вызываемая вѣсомъ тѣла, какъ бы не производитъ ожидаемаго дѣйствія. Но нужно вспомнить, что законы равновѣсія мы можемъ примѣнять къ явленіямъ движенія не иначе, какъ прибавляя къ внѣшнимъ силамъ еще силы инерціи. При наклонномъ положеніи волчка, онъ вращается не около своей оси фигуры, а около другой мгновенной оси, хотя близкой къ оси фигуры, но все-таки отличающейся отъ нея. Центробѣжныя силы этого вращенія не уравновѣшиваются взаимно, какъ это происходитъ при вращенiи около оси симметрiи, а даютъ нѣкоторую пару, которая и уравновѣшиваетъ опрокидывающее дѣйствiе вѣса волчка.

71. *Примѣры изъ Гидравлики.* Мы можемъ къ движенiю жидкостей примѣнять законы равновѣсiя, т. е. законы Гидростатики, но при томъ непремѣнномъ условiи, что къ внѣшнимъ силамъ прибавлены силы инерцiи.

На этомъ основанiи получаемъ слѣдующiе выводы:

a) Если движенiе частицъ жидкости вездѣ прямолинейное и равномѣрное, то ускоренiя, а слѣд. и силы инерцiи, равны нулю. Поэтому потерянныя силы, о равновѣсiи которыхъ говоритъ Начало Даламбера, превращаются во внѣшнiя силы, и условiя равновѣсiя при движенiи ничѣмъ не отличаются отъ условiй равновѣсiя при покоѣ. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ распредѣленiе давленiй въ жидкости будетъ слѣдовать гидростатическимъ законамъ. Но было бы неправильно распространять чисто статическiе законы распредѣленiя давленiя и на всѣ другiе случаи движенiя.

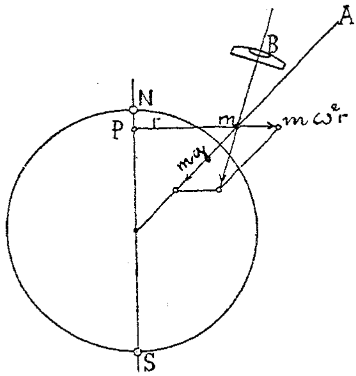
b) Пусть частицы жидкости движутся такъ, что ускоренiя ихъ какъ разъ такiя, которыя были бы сообщены внѣшними силами этимъ частицамъ, если бы частицы были отдѣльны и не связаны между собою. Т. е. разсматриваемъ случаи, когда ускоренiе каждой частицы равно приложенной къ ней внѣшней силѣ, раздѣленной на массу частицы, и при томъ направленiе ускоренiя совпадаетъ съ направленiемъ силы. Въ этомъ случаѣ силы инерцiи будутъ равны и противуположны внѣшнимъ силамъ; слѣд. всѣ потерянныя силы равны нулю. По Даламберову Началу этотъ случай движенiя приводится къ тому случаю равновѣсiя, когда на частицы жидкости вовсе не дѣйствуютъ внѣшнiя силы. А тогда давленiе во всей массѣ жидкости будетъ одинаковое.

Падающiй сосудъ, наполненный водою, послужитъ намъ примѣромъ такого случая; въ немъ давленiе не будетъ увеличиваться по направленiю отъ поверхности воды ко дну сосуда; оно будетъ вездѣ одинаково и такое же, какъ на поверхности, т. е. будетъ равно атмосферному давленiю.

Другимъ примѣромъ можетъ служить струя воды, вытекающей изъ сосуда.

c) Возьмемъ случай, когда всѣ частицы жидкости движутся прямолинейно и при томъ перпендикулярно къ нѣкоторой плоскости S. Тогда въ этой плоскости давленіе будетъ измѣняться по гидростатическому закону.

Всѣ эти выводы имѣютъ особое значеніе въ Гидравликѣ. Обыкновенно ихъ получаютъ изъ разсмотрѣнія общихъ гидродинамическихъ уравненій *). Но мы видимъ, что они представляютъ непосредственное слѣдствіе Начала Даламбера.



Фиг. 59.

72. ***Видимое направленіе силы тяжести.*** Притяженіе земли направлено къ ея центру, и потому грузикъ отвѣса вытягиваетъ нить по направленію радіуса земли и уравновѣшивается на этой связи. Такъ должно было бы произойти, если бы земля была въ покоѣ. Но она движется, и нужно къ внѣшней силѣ, дѣйствующей на грузикъ (его вѣсу), прибавить силу инерціи, т. е. центробѣжную силу. Равнодѣйствующая этихъ двухъ силъ уравновѣшивается связью, слѣд. нить расположится по направленію такой равнодѣйствующей и не будетъ совпадать съ радіусомъ земли. На фиг. 59 сдѣлано построеніе этой равнодѣйствующей: NS есть ось земли; m—грузикъ отвѣса. Вѣсъ его mg идетъ къ центру земли. Центробѣжная сила направлена по продолженію радіуса mp того круга, который описываетъ грузикъ m при вращеніи земли. Величина центробѣжной силы будетъ

$$m.\omega^2 r$$

(ω—угловая скорость вращенія земли). Равнодѣйствующая даетъ направленіе mB нити отвѣса. Это будетъ то, что мы называемъ вертикальной линіей. Горизонтальная плоскость, опредѣляемая помощію уровня съ воздушнымъ пузырькомъ, будетъ перпендикулярна къ mB.

73. ***Кажущееся направленіе тяжести на волнахъ.*** Будемъ говорить о правильныхъ волнахъ, которыя поддерживаются на морѣ нѣкоторое время послѣ окончанія бури. Это явленіе въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ глубина моря значительная, до-

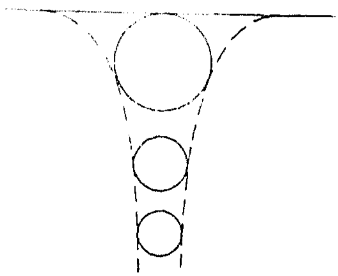
---

*) См. напр. Bresse. Cours de Mécanique appliquée. Partie II. Hydraulique, p. 40—42.

вольно хорошо изображается такъ называемыми трохоидальными волнами Герстнера *).

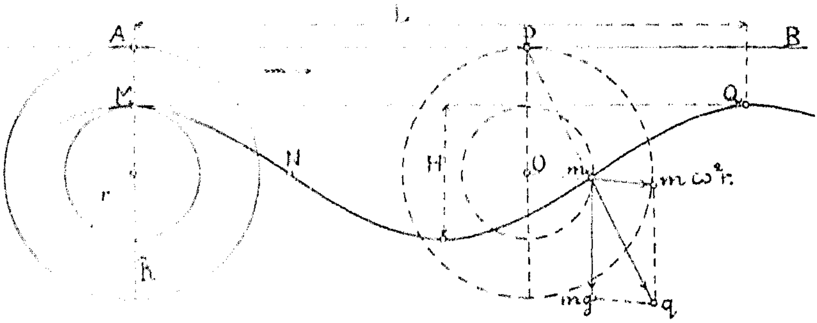
Трохоидальную волну можно описать слѣд. образомъ: a) каждая частица воды описываетъ въ вертикальной плоскости кругъ, центръ котораго неподвиженъ; движеніе по кругу равномѣрное.

Для частицъ, расположенныхъ на поверхности, радіусъ такого круга наибольшій; величина радіуса быстро уменьшается для частицъ, расположенныхъ въ глубинѣ (фиг. 60).



Фиг. 60.

в) Форма поверхности волны представляется такъ называемой трохоидой, т. е. кривой, которая производится слѣдующимъ построеніемъ (фиг. 61). Пусть кругъ радіуса r представляетъ



Фиг. 61.

путь той частицы воды, которая находится на поверхности волны. Концентрично съ нимъ построимъ большій кругъ такого размѣра, что окружность этого круга равна скорости движенія гребня волны. Проведемъ через верхнюю точку большаго круга касательную AB и покатимъ кругъ по AB безъ скольженія, тогда любая точка малаго круга, считая его неизмѣнно связаннымъ съ большимъ, опишетъ трохоиду. На фиг. 61 изображена трохоида MNQ, описанная точкою M малаго круга.

Разсмотримъ какую нибудь частицу массы, находящуюся на поверхности. На нее дѣйствуетъ внѣшняя сила, ея вѣсъ mg.

*) Теоретическая Гидродинамика даетъ такую форму волнъ для предѣльнаго случая, когда глубина моря предполагается безконечно большой. См. Appell. Traité de Mécanique. T. III, p. 491.

Если бы имѣли равновѣсіе, то поверхность жидкости расположилась бы перпендикулярно къ этой силѣ. Но мы имѣемъ случай движенія; слѣд. законы Гидростатики нужно примѣнять не къ внѣшней силѣ, а къ потерянной силѣ, которая получается какъ равнодѣйствующая изъ внѣшней силы и силы инерціи. Наша частица m описываетъ кругъ радіуса $= r$, имѣющій центромъ O; сила инерціи здѣсь будетъ центробѣжная сила

$$m . \omega^2 . r ,$$

направленная по радіусу Om, отъ центра.

Здѣсь ω есть угловая скорость вращенія точки m, или, что все равно, угловая скорость большаго катящагося круга, который описываетъ трохоиду.

Пусть длина волны есть L, а скорость ея гребня V; частица m, дѣлающая одинъ оборотъ въ теченіи времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

по прошествіи этого времени приходитъ въ прежнее свое положеніе; это соотвѣтствуетъ передвиженію волны на всю ея длину L. Слѣд. скорость движенія волны V получается изъ условія

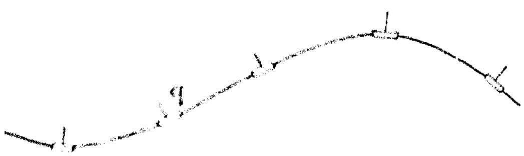
$$V . \frac{2\pi}{\omega} = L,$$

откуда найдемъ ω. И такъ эта угловая скорость извѣстна, если мы знаемъ V и L. Радіусъ r опредѣляется высотою волны H и составляетъ ровно половину ея. Такимъ образомъ, зная V, L, H, мы получаемъ силу инерціи

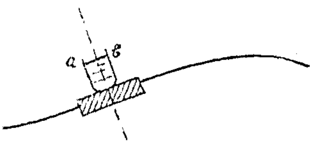
$$m\omega^2 r$$

и можемъ построить потерянную силу, означенную на чертежѣ буквами mq. Къ этой потерянной силѣ относятся тѣ явленія и условія равновѣсія, которыя даетъ Гидростатика для силы тяжести въ случаѣ покоя. При волнообразномъ движеніи mq представляетъ кажущуюся силу тяжести. Поэтому поверхность жидкости въ точкѣ m, т. е. касательная къ поверхности волны въ этой точкѣ, должна расположиться перпендикулярно къ mq. Небольшой поплавокъ съ крошечной мачтой расположится (фиг. 62) такъ, что мачта его пойдетъ по линіи mq. Если бы намъ удалось на этотъ поплавокъ поставить стаканъ, наполненный водою до краевъ (фиг. 63), то вода не должна выливаться, такъ какъ на волнѣ наклонная плоскость ab играетъ ту же роль, какъ горизонтальная плоскость при покоѣ жидкости.

Итакъ при волнообразномъ движенiи получается кажущееся направленiе силы тяжести mq и кажущаяся горизонтальная плоскость, перпендикулярная къ mq. Если выберемъ опредѣлен ную частицу жидкости m и будемъ слѣдить за явленiями, происходящими съ этой частицей, то увидимъ слѣдующее: (фиг. 61.,



Фиг. 62.

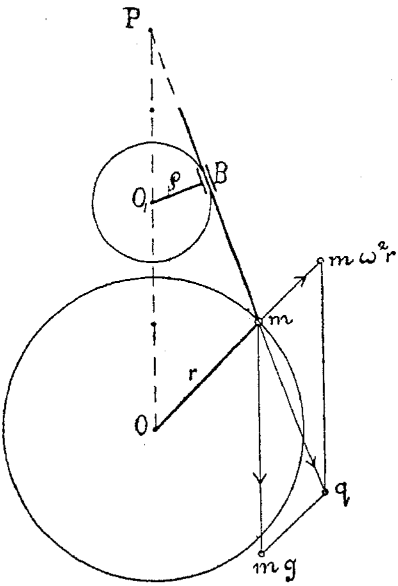


Фиг. 63.

эта частица двигается по кругу съ центромъ O; въ то же время трохоидальная видимая поверхность волны равномѣрно перемѣщается по направленiю стрѣлки со скоростью V. При этомъ частица m будетъ постепенно оказываться въ разныхъ точкахъ N, M, Q волны; какъ наклонъ видимой силы тяжести mq у частицы m, такъ и наклонъ видимаго горизонта у этой частицы, будутъ постепенно измѣняться; измѣненiя эти перiодическiя, и перiодъ опредѣляется временемъ оборота частицы m.

74. *Искусственная волна. Приборъ капитана Руссо.* Этотъ приборъ предназначенъ для изслѣдованiя качанiй судовъ на волнахъ. Для этого модель испытываемаго судна ставится на площадку, изображающую искусственный горизонтъ волны; вмѣстѣ съ тѣмъ воспроизводится и искусственная сила тяжести, опредѣляемая по величинѣ и направленiю равнодѣйствующей mq (фиг. 61).

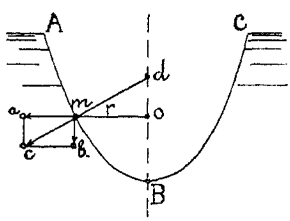
Для полученiя такого результата въ приборѣ (фиг. 64) имѣются два вращающихся кривошипа—малый ρ и большой r, осямъ которыхъ O и O_1 при помощи зубчатаго зацѣпленiя, сообщаются тождественныя вращенiя, такъ что ρ всегда параллеленъ r. Шатунъ mB соединенъ съ концомъ кривошипа r шарниромъ m, а на концѣ кривошипа ρ поставлена поворотная трубочка, сквозь которую проходитъ и можетъ скользить въ ней другой конецъ шатуна. Площадка, перпендикулярная къ шатуну mn, изображаетъ поверхность волны, т. е. искусственный горизонтъ, а линiя mB—видимую силу тяжести.



Фиг. 64.

Въ справедливости этого мы убѣдимся, когда мы замѣтимъ, что, вслѣдствіе параллельности кривошиповъ r и ρ, продолженіе шатуна mn встрѣчаетъ линію центровъ OO всегда въ одной и той же точкѣ P. Легко увидѣть соотвѣтствіе фигуръ 64 и 61, на которыхъ для ясности поставлены одинаковыя буквы; на обѣихъ фигурахъ кругъ радіуса mO обозначаетъ путь той частицы жидкости m, которая приходится на поверхности волны. OP—есть радіусъ большаго катящагося круга, производящаго трохоиду; P — означаетъ мгновенный центръ, въ который должна направляться нормаль къ трохоидѣ, по общему свойству всѣхъ циклическихъ кривыхъ.

На этомъ приборѣ легко производится опытъ съ наполненнымъ стаканомъ воды, о которомъ было сказано выше *).



Фиг. 65

75. ***Жидкость въ сосудѣ, вращающемся около вертикальной оси*** (фиг. 65). При этомъ внутри сосуда образуется воронкообразная пустота, очерченная поверхностью вращенія AmBC. Разсматривая какую нибудь частицу жидкости m, расположенную на этой поверхности, опредѣлимъ потерянную силу mc, какъ равнодѣйствующую изъ силы тяжести mb и центробѣжной силы ma, которая равна

$$m\,\omega^2 r$$

(ω—угловая скорость вращенія сосуда).

Равновѣсіе жидкости подъ дѣйствіемъ потерянной силы требуетъ, чтобы у m поверхность жидкости была нормальна къ

*) Изобрѣтатель назвалъ свой приборъ Navipendulum, т. е. морской маятникъ. Результаты опытовъ на этомъ приборѣ съ моделями судовъ см. въ журналѣ Engineering 1902 года. Volume 73, p.p. 520, 590.

направленію силы mc, или другими словами mc будетъ нормаль къ кривой AmBC въ точкѣ m. Продолжимъ эту нормаль до встрѣчи съ осью вращенія къ точкѣ d. Изъ подобныхъ треугольниковъ.

mdo и mbc

получаемъ:

$$\frac{od}{om} = \frac{mb}{bc} = \frac{mg}{m\omega^2 r}.$$

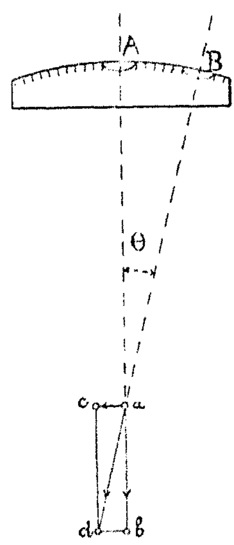
Откуда

$$od = \frac{g}{\omega^2},$$

т. е. поднормаль od нашей кривой AmBC не зависитъ отъ r, слѣд. одинакова для всѣхъ точекъ этой кривой. Но извѣстно, что кривая, имѣющая постоянную поднормаль, есть парабола. Итакъ кривая AmBC парабола, и воронка, образующаяся при вращеніи сосуда, представляетъ параболоидъ вращенія *).

76. *Измѣреніе силъ инерціи.* Всѣмъ знакомы приборы, которыми измѣряютъ центробѣжную силу на центробѣжной машинѣ физическихъ кабинетовъ. Подобнымъ путемъ можно измѣрить и другія силы инерціи въ различныхъ машинахъ. Опишемъ нѣсколько приборовъ, устроенныхъ для этой цѣли.

Вильфредъ Люисъ измѣрялъ ускоренія (а слѣд. и силы инерціи) при движеніи желѣзнодорожныхъ поѣздовъ помощію спиртоваго уровня съ сильно искривленной поверхностью трубки **) (фиг. 66). При покоѣ воздушный пузырекъ располагается у точки A, въ которой нормаль Aa поверхности трубки вертикальна. Но при движеніи сила тяжести должна быть замѣнена потерянной силой. Пусть ab представляетъ ускореніе силы тяжести; ac — величину ускоренія при движеніи поѣзда, отложенную въ сторону, противоположную направленію ускоренія, т. е. въ сторону противуположную движенію, если скорость увеличивается, и по направленію движенія, если скорость уменьшается. Тогда ad представитъ направленіе потерянной силы. Воздушный пузырекъ установится у той



Фиг. 66.

*) См. прибавленіе въ концѣ бесѣды.

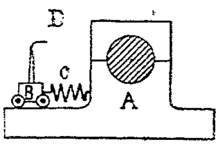
**) Engineering. 1898 г. July 1.

точки В, нормаль въ которой Ва параллельна силѣ ad. Опытъ даетъ точки А и В, а по дѣленіямъ на уровнѣ найдемъ соотвѣтствующій уголъ Θ между нормалями Аа и Ва. Тангенсъ этого угла будетъ равенъ отношенію

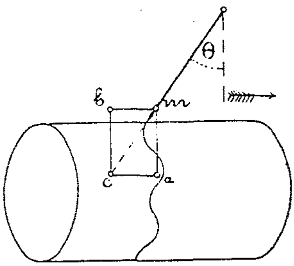
$$\frac{db}{ab},$$

а такъ какъ ab есть извѣстное ускореніе тяжести, то мы найдемъ db, т. е. ускореніе движенія поѣзда. Въ приборѣ Люиса уголъ Θ доходилъ до 9 градусовъ.

Вилліамсъ устроилъ приборъ для опредѣленія ускоренія и силъ инерціи при движеніи поршня паровой машины. Схема этого



Фиг. 67.



Фиг. 68.

прибора (Inertia Instrument) представлена на фиг. 67. На крестовинѣ паровой машины А расположена небольшая телѣжка В, размахи которой сдерживаютя пружиной С; сжатіе и растяженіе ея пропорціональны дѣйствуюищимъ на пружину силамъ, т. е. перемѣнной силѣ инерціи телѣжки. Указаталь D показываетъ величину сжатія и растяженія пружины и чертитъ эти величины на особомъ индикаторѣ *).

Изъ числа приборовъ, примѣненныхъ Дéдуи при изученіи движенія поѣздовъ **), укажемъ на его маятникъ (фиг. 68). Пусть ускореніе направлено по стрѣлкѣ; маятникъ отклонится отъ вертикальнаго положенія на уголъ Θ, тангенсъ котораго опредѣляется отношеніемъ ускоренія движенія поѣзда mb къ ускоренію тяжести ma.

*) См. въ книгѣ Carpenter. Experimental Engineering.

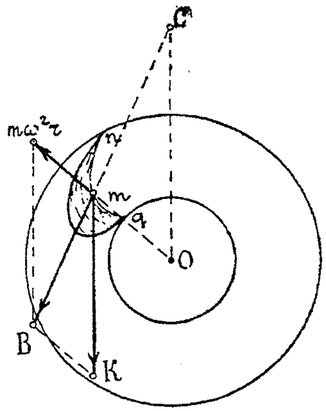
**) Annales des Ponts et Chaussées, T. XI.

ПРИБАВЛЕНІЕ КЪ 4-ой БЕСѢДѢ.

Уровень воды въ ковшахъ наливнаго колеса.

Въ сочиненіяхъ по Прикладной Механикѣ часто приходится встрѣчать подобный же выводъ, какъ и въ n° 75, но примѣненный къ случаю вращенія около горизонтальной оси. Разбираютъ движеніе наливнаголеса и стараются опредѣлить, какъ измѣняется, вслѣдствіе вращенія колеса, уровень воды, налитой въ ковши. При этомъ считаютъ, что на частицу воды m (фиг. 69) дѣйствуютъ ея вѣсъ mg и центробѣжная сила

$$m \cdot \omega^2 \cdot r,$$



Фиг. 69.

соединяемыя въ одну равнодѣйствующую mB. Поверхность воды въ ковшѣ у точки m должна быть перпендикулярна къ этой равнодѣйствующей. Продолжимъ mB до встрѣчи въ C съ вертикалью, которая проходитъ черезъ центръ колеса O. Изъ подобія треугольниковъ

$$mBK \text{ и } CmO$$

получаемъ:

$$\frac{CO}{mO} = \frac{mK}{KB}$$

или

$$\frac{CO}{r} = \frac{mg}{m\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2 r}$$

откуда

$$CO = \frac{g}{\omega^2}$$

И такъ CO не зависитъ отъ радіуса r, слѣд. точка C одна и та же для всѣхъ частицъ воды, расположенныхъ на разрѣзѣ поверхности nmq воды, которая наполняетъ ковшъ. Слѣд. всѣ нормали къ этой поверхности встрѣчаются въ одной точкѣ C, т. е. эта поверхность представляетъ въ разрѣзѣ кругъ, имѣющій центръ въ C. Притомъ этотъ центръ одинаковъ для всѣхъ ковшей колеса.

Моренъ въ своей Гидравликѣ *), приводя этотъ выводъ, указываетъ, что онъ принадлежитъ Понсле и имѣется въ одномъ изъ литографированныхъ курсовъ, составленныхъ по лекціямъ, читаннымъ этимъ знаменитымъ ученымъ въ артиллерійской школѣ въ Мецѣ. Долгое время этотъ выводъ повторялся безъ измѣненія и встрѣчается даже въ новыхъ сочиненіяхъ. Между тѣмъ онъ ошибоченъ. На это указалъ Резаль **).

Желающіе найдутъ у Резаля подробный разборъ вопроса, а мы ограничимся нѣсколькими поясненіями. Легко видѣть, почему разсужденіе, дающее вѣрный результатъ въ случаѣ вращенія около вертикальной оси, непримѣнимо къ случаю вращенія около горизонтальной оси. Въ послѣднемъ случаѣ неправильно допускать, что силы инерціи воды заключаются въ одной только центробѣжной силѣ. Это было бы вѣрно только тогда, когда уровень воды въ ковшѣ, принявъ криволинейный видъ, сохранялъ бы такое криволинейное очертаніе неизмѣнно во все время вращенія колеса, какъ будто бы вода была неизмѣнно связана съ колесомъ.

Но этому противурѣчитъ приведенный ими выводъ; онъ даетъ постоянный центръ C для круговаго очертанія поверхности воды въ ковшѣ. При вращеніи колеса, когда ковшъ будетъ удаляться отъ C, радіусъ круговаго очертанія поверхности воды увеличивается. Слѣд. это очертаніе постепенно измѣняется, и нельзя считать, что вода какъ бы неизмѣнно соединена съ вращающимся колесомъ. Она имѣетъ въ ковшѣ нѣкоторое движеніе относительно колеса. А въ случаѣ такого относительнаго движенія *силы инерціи не приводятся къ одной только центробѣжной силѣ*. Нужно вспомнить Коріолисово ускореніе и соотвѣтствующую силу инерціи и присоединить ее къ центробѣжной силѣ. Вслѣдствіе этого, повторяемъ, выводъ n° 75 нельзя примѣнять къ наливному колесу и вообще къ какому либо вращенію около оси, которая не вертикальна.

---

*) Morin. Hydraulique. p. 380.

**) Traité de Mécanique. T. II. p. 169 (изданіе 1874г.).

ПЯТАЯ БЕСѢДА.

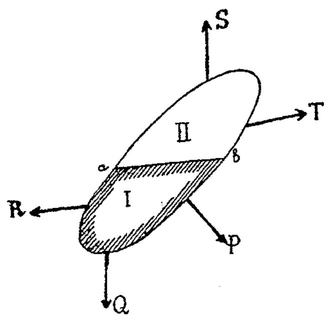
Опредѣленіе силъ связи при движеніи системы.

Даламберово Начало, какъ мы видѣли, заключается въ томъ, что потерянныя силы уравновѣшиваются связями системы. Поэтому силы связи при движеніи системы найдутся также какъ при равновѣсіи, но къ числу внѣшнихъ силъ нужно присоединить всѣ силы инерціи. Можно при этомъ пользоваться какъ общимъ правиломъ опредѣленія силъ связи, получаемымъ изъ Начала Возможныхъ Перемѣщеній, такъ и частными правилами для опредѣленныхъ системъ или машинъ, если эти правила намъ извѣстны или легко могутъ быть найдены. Такимъ образомъ, вводя силы инерціи, мы замѣняемъ задачу, поставленную въ этой бесѣдѣ, другой болѣе простой задачей равновѣсія.

Связи въ машинахъ бываютъ разнаго рода. Иногда это давленія опоръ; при движеніи такія давленія отличаются отъ случая равновѣсія тѣмъ, что къ внѣшнимъ силамъ нужно прибавить силы инерціи.

Или иначе: давленія опоръ при движеніи могутъ быть разсматриваемы какъ происходящія отъ совокупности двухъ причинъ: a) внѣшнихъ силъ; b) силъ инерціи. Давленіе, вызываемое первой причиной, будемъ называть статическимъ давленіемъ. Вторая причина вызываетъ динамическую прибавку къ давленію.

Очень обыкновенный случай связи представляетъ сцѣпленіе частей одного и того же твердаго тѣла, входящаго въ составъ системы. Это внутреннія силы или напряженія, получающіяся въ твердомъ тѣлѣ отъ дѣйствія на него силъ. Силы эти изучаются въ Теоріи Упругости и въ Ученіи о Сопротивленіи матеріаловъ. Общій пріемъ, примѣняемый при этомъ, заключается въ слѣдующемъ: пусть на какое нибудь тѣло дѣйствуютъ внѣшнія силы P, Q, R, S, T, находящіяся въ равновѣсіи (фиг. 70). Разрѣжемъ тѣло на двѣ части и замѣнимъ связь этихъ частей, происходящую по разрѣзу ab, внутренними силами. Часть I находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ P, Q, R и внутреннихъ, приложенныхъ по разрѣзу ab. Условія равновѣсія такой системы даютъ искомыя внутреннія силы.



Фиг. 70.

Но такъ какъ всѣ условія и уравненія равновѣсія прямо примѣняются и къ движенію, съ обязательствомъ только прибавить силы инерціи, то для случая движенія получимъ:

внутреннія силы, дѣйствующія по ab, должны уравновѣсить не только внѣшнія силы P, Q, R, но еще всѣ силы инерціи, приложенныя къ I-ой части тѣла. Другими словами: всѣ силы инерціи должны быть причислены къ силамъ, стремящимся разрушить тѣла. Этимъ отличаются условія прочности въ Динамикѣ отъ условій прочности для случая покоя.

Напр. въ маховомъ колесѣ слѣдуетъ считать разрушающей силой центробѣжную силу его обода. Притомъ оказывается, что это самая важная, наиболѣе опасная разрушающая сила. При большихъ скоростяхъ движенія маховика трудно устроить его достаточно прочнымъ для выдерживанія центробѣжной силы и приходится прибѣгать къ особымъ конструкціямъ для полученія достаточнаго сопротивленія. Напр. вмѣсто чугунныхъ ручекъ маховика ставятъ желѣзныя; или замѣняютъ ручки сплошными желѣзнымл дисками; нагоняютъ на чугунный ободъ колеса стальной бандажъ; обтягиваютъ чугунный ободъ маховика большимъ числомъ оборотовъ проволоки, намотанной какъ на катушку. Наконецъ теперь часто вовсе отказываются отъ примѣненія чугуна къ быстродвижущимся колесамъ значительнаго діаметра и дѣлаютъ ободъ изъ желѣзныхъ сегментовъ *).

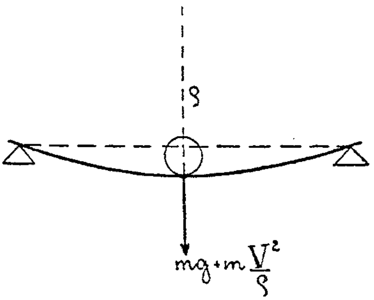
*) Такая конструкція обода очень распространена при устройствѣ большихъ альтернаторовъ. См. Engineering. 1901 года 16-го Авг. и слѣд.

Примѣры маховиковъ съ желѣзнымъ ободомъ см. въ Zeitshrift des Vereines deutscher Ingenieure 1896. S. 189, 590.

77. ***Подвижной грузъ на мосту.*** Такъ какъ при переходѣ груза мостъ искривляется, то появляется центробѣжная сила движущагося груза, которую нужно прибавить къ вѣсу груза. Изгибающей силой слѣдуетъ считать сумму этихъ двухъ силъ, т. е. (фиг. 71)

$$m.g + m \frac{V^2}{\rho}$$

(m—масса груза, g—ускореніе тяжести, V—скорость движенія груза, ρ—радіусъ кривизны искривленнаго моста) *).



Фиг. 71.

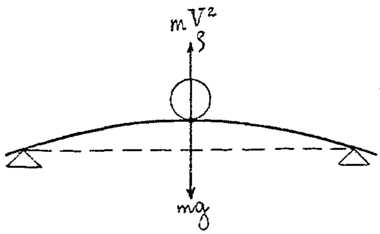
Поэтому прогибъ моста въ случаѣ движенія груза будетъ больше, чѣмъ въ случаѣ покоя. Эту разницу легко демонстрировать на модели; когда въ 40-хъ годахъ прошлаго столѣтія въ Англіи былъ поднятъ вопросъ о вредномъ вліяніи быстро движущихся поѣздовъ на прочность мостовъ, то были произведены обширные опыты съ моделями. По порученію парламентской желѣзно-дорожной коммисіи, такіе опыты производилъ въ Порстмутѣ Генри Джемсъ. У него неоднократно получалось, что прогибъ отъ движущагося груза (динамическій прогибъ) выходитъ вдвое и втрое больше, чѣмъ отъ того же груза въ покоѣ (статическій прогибъ). Но значительное превышеніе динамическаго прогиба надъ статическимъ можно получить только на такихъ моделяхъ, въ которыхъ масса мостовой балки не велика по сравненію съ массой движущагося груза. Настоящіе мосты съ большимъ пролетомъ имѣютъ обыкновенно значительную массу, и динамическій прогибъ ихъ лишь очень немного превышаетъ статическій, обыкновенно не болѣе какъ на десять процентовъ. Болѣе значительное превышеніе динамическаго прогиба надъ статическимъ получается для мостовъ съ малымъ пролетомъ, и въ особенности для рельсовъ.

78. Вообразимъ, что грузъ движется по кривой балкѣ, имѣющей выпуклость, которая направлена кверху (фиг. 72). Тогда

---

*) Мы предполагаемъ, что грузъ при движеніи все время прикасается къ балкѣ и не отдѣляется отъ нея. При большихъ скоростяхъ можетъ случиться, что это условіе не выполнено. См. работу Н. П. Петрова въ Запискахъ Техническаго Общества. Декабрь 1903 года.

центробѣжная сила груза идетъ противуположно его вѣсу, и изгибъ производится разностью этихъ двухъ силъ



Фиг. 72.

$$mg - m\frac{V^2}{R}.$$

При этомъ динамическій прогибъ долженъ получиться меньше чѣмъ статическій отъ того же груза.

Чтобы провѣрить этотъ результатъ Генри Джемсъ при своихъ опытахъ однажды поставилъ балку, искривленную кверху; опытъ далъ прогибъ замѣтно меньшій, чѣмъ для балки, которая первоначально была прямая.

79. *Общій вопросъ о реальности или иллюзорности силъ инерціи.* Въ предъидущей бесѣдѣ силы инерціи появились у насъ какъ математическое опредѣленіе, для обозначенія нѣкоторыхъ членовъ въ уравненіяхъ движенія. Но теперь мы видимъ, что эти силы производятъ извѣстныя дѣйствія, изгибаютъ пружины или балки, увеличиваютъ или уменьшаютъ давленія на опоры и даже иногда могутъ произвести разрывы маховыхъ колесъ и разрушеніе разныхъ частей машинъ. Все это указываетъ, что такія силы не представляютъ математическія фикціи, а существуютъ въ дѣйствительности и проявляютъ свое существованіе такими же явленіями, какъ и другія извѣстныя намъ силы. Такимъ образомъ, здѣсь какъ будто бы получается нѣкоторое противурѣчіе съ первоначальнымъ опредѣленіемъ силъ инерціи, которое нужно разъяснить.

Замѣтимъ, что это противурѣчіе встрѣчается уже при первомъ знакомствѣ съ центробѣжной силой, которое мы получаемъ при изученіи элементарной Физики, гдѣ изъ всѣхъ возможныхъ многочисленныхъ силъ инерціи разсматриваютъ только одну центробѣжную силу. Въ средней школѣ вопросъ о томъ, существуетъ ли центробѣжная сила въ дѣйствительности, или она представляетъ собою только математическую фикцію, всегда подаетъ поводъ къ продолжительнымъ спорамъ. Разсматривая грузикъ, который привязанъ ниткой къ нѣкоторой точкѣ и описываетъ кругъ около этой точки какъ центра, противники существованія центробѣжной силы разсуждаютъ слѣдующимъ образомъ: масса m движется по кругу подъ дѣйствіемъ натяженія нитки, которая тянетъ грузъ къ центру. Это центростремительная сила, которая равна произведенію изъ массы m на ускореніе кругового движенія, т. е. равна

$$m \cdot \frac{V^2}{R}.$$

(V—скорость равномѣрнаго движенія по кругу, R—радіусъ круга). Подъ дѣйствіемъ этой силы, вмѣсто прямолинейнаго движенія по инерціи, получается круговое движеніе. Допустимъ, что центробѣжная сила не есть фикція, а существуетъ реально. Это означаетъ, что къ тѣлу m, кромѣ центростремительной силы, приложена еще и центробѣжная. Эти двѣ силы равны и прямопротивуположны, слѣд. взаимно уничтожаются; и такъ допущеніе реальности центробѣжной силы равносильно принятію, что на m не дѣйствуетъ никакой силы. Но тогда масса m должна была бы двигаться по инерціи прямолинейно, а между тѣмъ она идетъ по кругу. Получается противурѣчіе, и оно вызвано допущеніемъ реальнаго существованія центробѣжной силы.

Ошибка этого разсужденія состоитъ въ томъ, что обѣ силы центробѣжную и центростремительную—считаютъ приложенными къ одному и тому же тѣлу—массѣ m. Между тѣмъ мы имѣемъ здѣсь систему, состоящую изъ двухъ тѣлъ: массы m и нити; послѣдняя есть связь системы. Между этими двумя тѣлами происходитъ взаимодѣйствіе, подчиненное третьему закону Ньютона, т. е. закону равенства между дѣйствіемъ и противудѣйствіемъ. Дѣйствіе нити на тѣло есть центростремительная сила. Но и тѣло m обратно дѣйствуетъ на нить; это противудѣйствіе и есть центробѣжная сила; она приложена не къ массѣ m, а къ нити; поэтому нить растягивается и можетъ даже быть разорвана.

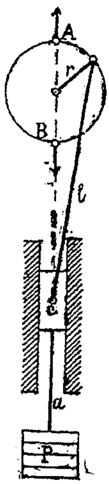
То же самое разсужденіе относится и ко всѣмъ другимъ случаямъ. Силы инерціи существуютъ реально какъ силы, дѣйствующія на связи системы. Въ этихъ связахъ онѣ производятъ всѣ такія же явленія, какъ и прочія извѣстныя намъ силы; силы инерціи деформируютъ связи, вызываютъ въ нихъ внутреннія напряженія, могутъ разрушать связь *) и т. д.

80. ***Пользованіе силами инерціи. Приборъ Осборнъ Рейнольдса.*** Убѣдившись въ существованіи силъ инерціи, мы

*) Недавно былъ произведенъ интересный опытъ. При помощи оптической методы, было опредѣлено и измѣрено то измѣненіе формы, которое получается въ маховикѣ при его движеніи, вслѣдствіе центробѣжной силы. См. Dingler's Polytechnisches Journal отъ 25 февраля 1905 г.

можемъ пользоваться ими для нашихъ цѣлей. Хорошимъ примѣромъ такого утилизированія силъ инерціи послужитъ приборъ, устроенный Осборнъ Рейнольдсомъ *) для испытанія сопротивленія металловъ дѣйствію поперемѣнныхъ силъ—то растягивающихъ, то сжимающихъ **).

Въ приборѣ О. Рейнальдса (фиг. 73) испытываемый металлическій брусочекъ *a*, соединяется нижней частью своей съ грузомъ P, а вверху прикрѣпляется къ ползуну c, который получаетъ поперемѣнное движеніе вверхъ и внизъ при помощи шатуна *l* и кривошипа r. Валъ кривошипа особымъ двигателемъ вращается равномѣрно съ большой скоростью, и можетъ дѣлать до 2000 оборотовъ въ минуту. При этомъ грузъ P движется поперемѣнно вверхъ и внизъ; при каждой перемѣнѣ направленія, скорость P обращается въ нуль, слѣдовательно движеніе его неравномѣрное, а то ускоренное, то замедленное. Ускоренія эти указываютъ на появленіе силъ инерціи груза P, которыя будутъ дѣйствовать какъ разрущающія силы на испытываемый брусокъ *a*.



Фиг. 73.

Для двухъ крайнихъ положеній груза P, когда пуговка кривошипа становится въ A или B, силы инерціи груза P почти равны той центробѣжной силѣ, которую имѣлъ бы этотъ грузъ, если бы былъ посаженъ на пуговку кривошипа и вертѣлся съ нею, описывая кругъ діаметра AB. Величина центробѣжной силы равна:

$$m.\frac{V^2}{r} \; ^{***)} \quad . \; . \quad (20)$$

---

*) Philosophical Transactions. Vol. 119 (1902 года).

**) Такое испытаніе очень важно, потому что въ машинахъ часто встрѣчается поперемѣнное дѣйствіе силъ. Давно замѣчено, что металлы сопротивляются хуже всего такому дѣйствію, въ особенности если перемѣны слѣдуютъ одна за другою очень быстро. Поэтому уже давно, еще съ половины прошлаго столѣтія, занимаются изученіемъ сопротивленія металловъ при частыхъ перемѣнахъ нагрузки. Для этого было придумано много различныхъ приборовъ, изъ которыхъ наиболѣе распространены въ лабораторіяхъ приборы Вӧлера.

*) Это приблизительная величина силы инерціи; точное значеніе ея получится, умножая (20) для точки A на $(1-\frac{r}{l})$, а для точки B—на $(1+\frac{r}{l})$. Здѣсь l—длина шатуна; она въ нѣсколько разъ больше r, и потому поправочные множители близки къ единицѣ.

(m—масса груза P, V—скорость, съ которой движется по кругу пуговка кривошипа, r—радіусъ кривошипа). Направленія центробѣжныхъ силъ указаны на чертежѣ стрѣлками, таковы же и направленія силъ инерціи груза P. Когда кривошипъ приходитъ въ B, то сила инерціи направлена внизъ и, присоединяясь къ вѣсу груза P, растягиваетъ брусокъ *a*. При положеніи кривошипа въ A, сила инерціи направлена вверхъ; вычтя изъ нея вѣсъ груза P, получимъ силу, сжимающую брусочекъ *a*. Итакъ онъ при каждомъ оборотѣ вала то растягивается, то сжимается. При тѣхъ размѣрахъ, которые О. Рейнольдсъ придалъ своему прибору, силы инерціи для крайнихъ положеній груза P были въ нѣсколько разъ (до шестидесяти) больше вѣса P, и такимъ образомъ можно было получить значительныя разрушающія силы.

ШЕСТАЯ БЕСѢДА.

Уравновѣшеніе силъ инерціи.

81. *Вредныя дѣйствія силъ инерціи.* Когда силы инерціи велики, то онѣ могутъ принести значительный вредъ тѣмъ, что замѣтно увеличиваютъ силы связи, давленія на опорныя точки и т. д. Иногда это дѣйствіе силъ инерціи можетъ совершенно разстроить движущійся приборъ или машину; на желѣзныхъ дорогахъ кромѣ того получается порча рельсовъ, и даже разстройство всего пути. Силы инерціи увеличиваютъ треніе въ точкахъ опоры вращающихся валовъ; производятъ сильное истираніе и быстрое изнашиваніе подшипниковъ; вслѣдствіе дѣйствія силъ инерціи, часто получаются удары и сотрясенія въ частяхъ машинъ. Все это увеличиваетъ расходъ работы двигателя, приводящаго машину въ движеніе, усиливаетъ расходъ топлива, причиняетъ излишнюю трату смазочныхъ матеріаловъ. На эти неблагопріятныя дѣйствія не обращали вниманія въ прежнее время, когда скорость движенія машинъ, а слѣдовательно и силы инерціи, были невелики. Но съ введеніемъ въ употребленіе быстроходныхъ машинъ инженеры встрѣтились съ силами инерціи, имѣющими громадныя величины, и значеніе этихъ силъ выступило на первый планъ.

Такъ, напримѣръ, въ быстроходныхъ паровозахъ сила инерціи шатуна при 400 оборотахъ въ минуту въ 55 больше его вѣса *); эту силу необходимо принять во вниманіе при расчетѣ прочныхъ размѣровъ шатуна. Самая форма шатуна должна быть выбрана такая, чтобы обезпечить лучшее сопротивленіе изгибу, производимому означенной силой; шатуну паровоза необходимо придавать плоское или двутавровое сѣченіе, а не круглое, какъ это часто дѣлаютъ въ медленно ходящихъ заводскихъ паровыхъ машинахъ.

Перри приводитъ примѣръ паровоза, у котораго, при ско-

*) Романовъ. Паровозы. 2-е изд. стр. 35.

рости 85 миль въ часъ, получалась неуравновѣшенная центробѣжная сила на оси съ колесами, доходившая до 5 тонъ. При каждомъ оборотѣ колеса, когда центръ тяжести его приходился внизу, эта сила передается на рельсъ; при дальнѣйшемъ же вращеніи колеса рельсъ освобождается отъ этой силы. Такъ какъ колесо дѣлало около 340 оборотовъ въ минуту, то подобное приложеніе силы къ рельсу и отниманіе ея происходило 340 разъ въ минуту. Такое явленіе представляетъ ничто иное какъ рядъ сильныхъ ударовъ на рельсъ, производимыхъ быстро одинъ за другимъ. Это все равно какъ будто бы по рельсу колотили тяжелымъ молотомъ; при этомъ рельсъ и полотно дороги сильно страдаютъ.

Въ машинахъ встрѣчаются части, дѣлающія очень большое число оборотовъ; напр. веретена прядильныхъ машинъ—до 15000 оборотовъ въ минуту; валы паровыхъ турбинъ — до 20000 и 30000 оборотовъ въ минуту. Центробѣжная сила массы m, выражающаяся черезъ

$$\frac{p}{g}.\omega^2.r$$

(p—вѣсъ, g—ускореніе тяжести, ω — угловая скорость, r — разстояніе массы m отъ оси вращенія), при такихъ скоростяхъ будетъ отъ 5000r до 10000r разъ болѣе вѣса p *); слѣдовательно, даже при очень малыхъ радіусахъ r, силы инерціи выходятъ велики, и нужно принять всѣ мѣры для уменьшенія этихъ силъ или устранить дѣйствіе этихъ силъ на связи—уравновѣсить ихъ. Вообще въ современномъ машиностроеніи уравновѣшеніе силъ инерціи составляетъ предметъ постоянныхъ заботъ конструкторовъ.

82. *Силы инерціи вращающихся частей.* При вращеніи твердаго тѣла около постоянной оси нужно разсматривать силы инерціи двухъ родовъ: центробѣжныя и касательныя. Первыя изъ нихъ направлены по радіусу, отъ центра, и равны

$$m.\omega^2.r$$

(m—масса частицы, ω—угловая скорость вращенія, r—разстояніе частицы m отъ оси вращенія). Касательныя силы инерціи перпендикулярны къ радіусу, идутъ противуположно направленію углового ускоренія и равны

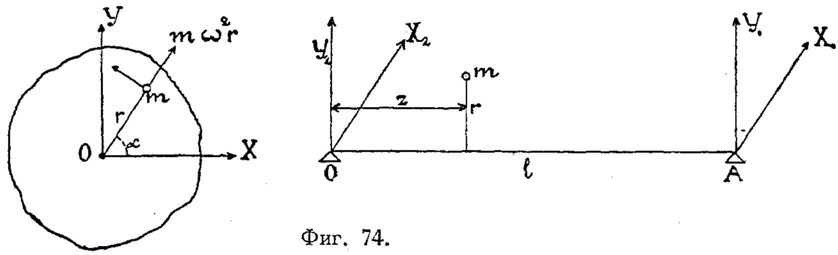
$$m.\frac{d\omega}{dt}.r$$

---

*) r долженъ быть выраженъ въ сантиметрахъ.

гдѣ $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускореніе; онѣ появляются только при неравномѣрномъ вращеніи, тогда какъ центробѣжныя силы не исчезаютъ даже и при полной равномѣрности движенія.

Разсмотримъ сначала центробѣжныя силы и опредѣлимъ, какое давленіе на подшипники вызываютъ эти силы инерціи. Пусть O и A (фиг. 74) два подшипника. Возьмемъ начало коор-



Фиг. 74.

динатъ въ O, направимъ ось Z по оси вращенія, оси X, Y — перпендикулярно къ ней. Координаты какой-нибудь частицы тѣла m назовемъ x, y, z; ея центробѣжная сила

$$m.\omega^2 r$$

можетъ быть разложена на слѣдующія двѣ составляющія по осямъ X, Y.

$$m.\omega^2.r.\ Cos\alpha \qquad\qquad m.\omega^2 r.\ Sin\alpha.$$

Но такъ какъ

$$Cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad\qquad Sin\alpha = \frac{y}{r},$$

то эти составляющія будутъ:

$$m.\omega^2 x \qquad\qquad m.\omega^2 y.$$

Силы связи въ подшипникахъ A и O, т. е. тѣ давленія подшипниковъ на вращающееся тѣло, которыя получаются отъ центробѣжныхъ силъ, тоже разложимъ по осямъ X, Y и назовемъ слагающія

для опоры A . . X_1, Y_1
для опоры O . . X_2, Y_2.

Введя эти силы связи, мы можемъ считать наше тѣло свободнымъ и примѣнять къ нему уравненія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла. Напишемъ два уравненія равновѣсія проекцій по осямъ X, Y, и два уравненія моементовъ для осей X, Y; получимъ четыре уравненія, изъ которыхъ найдемъ четыре неизвѣстныя

$$X_1,\ X_2,\ Y_1,\ Y_2.$$

Эти уравненія будутъ:

a) Сумма проекцій силъ связи и силъ инерціи для оси X_1 равна нулю:

$$X_1 + X_2 + \Sigma m.\omega^2.x = 0.$$

Здѣсь Σ означаетъ сумму, распространенную на всѣ частицы входящія въ составъ вращающагося тѣла. Такъ какъ во всѣхъ членахъ этой суммы есть постоянный множитесь ω^2, то его можно вынести за знак суммы и получимъ

$$\Sigma m.\omega^2 x = \omega^2 \Sigma mx.$$

Появилась сумма

$$\Sigma mx,$$

значеніе которой извѣстно изъ ученія о центрѣ тяжести. Если назовемъ массу всего тѣла (т. е. сумму массъ его частицъ) черезъ M, а координату его центра тяжести черезъ x_0, то, по опредѣленію центра тяжести, имѣемъ:

$$\Sigma mx = Mx_0$$

Итакъ наше первое уравненіе будетъ

$$X_1 + X_2 + x_0.M = 0 \quad . \ . \ . \ (21).$$

b) Второе уравненіе, выражающее, что сумма проекцій силъ на ось Y равна нулю, получится подобно первому и будетъ:

$$Y_1 + Y_2 + y_0.M = 0 \ . \ . \ . \ (22),$$

гдѣ y_0—координата центра тяжести вращающагося тѣла.

c) Третье уравненіе должно выражать, что сумма моментовъ силъ инерціи и реакцій опоръ относительно оси X_1 равна нулю.

При составленіи этого уравненія исключаются силы X_2, Y_2, потому что онѣ пересѣкаютъ ось моментовъ; также исключается сила X_1, которая параллельна оси моментовъ. Остается реакція Y_1, и моментъ ея будетъ

$$Y_1 l.$$

Моментъ той слагающей силы инерціи, которая параллельна оси X, исключается, и остается только моментъ слагающей

$$m.\omega^2 y;$$

плечо ея есть z, и моментъ будетъ

$$m.\omega.^2yz.$$

Суммируя моменты всѣхъ силъ инерціи, получимъ:

$$\Sigma m.\ \omega.^2yz;$$

а вынося за знакъ суммы общій множитель ω^2, имѣемъ:

$$\Sigma m.\omega^2yz = \omega^2\Sigma myz.$$

Слѣдовательно уравненіе равновѣсія моментовъ для оси X будетъ

$$Y_1l + \omega^2\Sigma myz = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Наконецъ четвертое уравненіе, выражающее, что сумма моментовъ для оси Y равно нулю, получится подобно третьему и даетъ:

$$X_1l + \omega^2\Sigma mxz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Изъ этихъ уравненій найдемъ реакціи опоръ

$$X_1,\ Y_1,\ X_2,\ Y_2.$$

Посмотримъ, нельзя ли достигнуть того, что всѣ эти реакціи будутъ нулями? Тогда центробѣжныя силы не будутъ производить никакого давленія на подшипники. Полученіе такого результата и называется уравновѣшиваніемъ центробѣжныхъ силъ; при этомъ совершенно устраняются всѣ тѣ вредныя дѣйствія силъ инерціи, о которыхъ мы говорили.

Обращаясь къ нашимъ уравненіямъ 21—24, видимъ, что если всѣ четыре опорныя реакціи суть нули, то уравненія даютъ условія

$$x_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$
$$y_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$
$$\Sigma myz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$
$$\Sigma mxz = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Эти четыре условія необходимы и достаточны для полнаго уравновѣшиванія центробѣжныхъ силъ инерціи. Первые два изъ нихъ указываютъ, что координаты x_0 y_0 центра тяжести вращающаго тѣла должны быть нулями, то есть:

центръ тяжести долженъ лежать на оси вращенія.

Кромѣ этого условія нужно еще удовлетворить уравненіямъ

(c) и (d). Для этого требуется извѣстное распредѣленіе массъ частицъ m въ тѣлѣ относительно оси вращенія, при которомъ положительные и отрицательные члены суммы

$$\Sigma myz$$

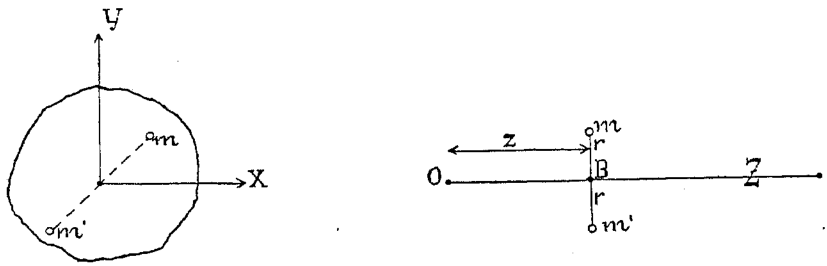
взаимно сокращаются; то же требуется и для другой суммы

$$\Sigma mxz.$$

Если эти условія выполнены, то ось вращенія называется главною осью тѣла. Итакъ получаемъ еще условіе для уравновѣшенія центробѣжныхъ силъ:

ось вращенія должна быть главною осью тѣла.

Чтобы показать возможность удовлетворенія этого условія замѣтимъ, что если въ тѣлѣ есть ось симметріи, то она на-



Фиг. 75.

вѣрное есть главная ось. На самомъ дѣлѣ, существованіе оси симметріи означаетъ, что (фиг. 75) для всякой частицы m, находящейся отъ оси на разстояніи

$$mB = r,$$

всегда можно найти, на продолженіи перпендикуляра mB и на разстояніи m^1B равномъ mB, симметричную частицу m^1 такой же массы, что и m. Эти двѣ частицы имѣютъ одинаковыя координаты z; ихъ координаты x, y численно одинаковы, но различаются знакомъ. Очевидно, взявши выраженія

$$mxz \text{ (или } myz)$$

для обѣихъ частицъ и складывая, получимъ нули. Но все тѣло состоитъ изъ такихъ паръ симметрическихъ частицъ; поэтому и полныя суммы

$$\Sigma mxz, \quad \Sigma myz$$

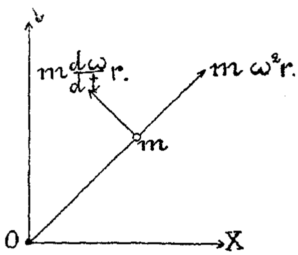
для всего тѣла будутъ нули.

Случай оси симметріи не есть единственный случай, когда ось имѣетъ свойство главной оси. Можно доказать, что въ каждомъ тѣлѣ для любой его точки есть три главныя оси, взаимно перпендикулярныя *).

83. ***Уравновѣшеніе касательныхъ силъ инерціи.*** Для уравновѣшенія центробѣжныхъ силъ требуется, какъ мы видѣли, выполненіе слѣдующихъ условій:

a) Центръ тяжести долженъ лежать на оси вращенія.

b) Ось вращенія должна быть главною осью тѣла.



Фиг. 76.

Не трудно показать, что тѣ же условія необходимы и достаточны для уравновѣшенія касательныхъ силъ инерціи.

Для этого сравнимъ тѣ и другія силы, посмотримъ, въ чемъ между ними заключается сходство и въ чемъ различіе (фиг. 76).

И тѣ и другія силы инерціи дѣйствуютъ на каждую частицу тѣла и пропорціональны произведенію

$$m.\ r.$$

Различіе состоитъ въ томъ, что это произведеніе въ центробѣжныхъ силахъ умножается на одинаковый для всѣхъ частицъ множитель

$$\omega^2,$$

а для касательныхъ силъ имѣется общій множитель

$$\frac{d\omega}{dt},$$

но это различіе не имѣетъ никакого значенія для уравновѣшенія.

Затѣмъ всѣ касательныя силы повернуты относительно центробѣжныхъ силъ на 90 градусовъ въ плоскости вращенія.

Итакъ мы можемъ перейти отъ системы центробѣжныхъ силъ къ системѣ касательныхъ силъ, умножая первыя на нѣкоторый постоянный множитель и поворачивая всѣ силы въ плоскости вращенія на 90 градусовъ.

Вмѣстѣ съ такимъ поворачиваніемъ силъ повернемъ на

---

*) См. прибавленіе къ десятой бесѣдѣ.

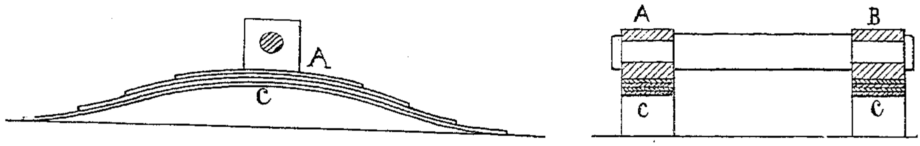
тотъ же уголъ и тѣ координатныя оси X, Y, которыя лежатъ въ плоскости вращенія. Очевидно отъ совокупности всѣхъ этихъ поворотовъ не измѣнятся ни проекціи силъ на оси X, Y, ни моменты силъ относительно этихъ осей. Если прежде равновѣсіе силъ было возможно безъ реакцій опоръ, то и теперь эти реакціи не потребуются для равновѣсія.

Слѣд. условія, при которыхъ касательныя силы инерціи не вызываютъ реакцій опоръ, одинаковы съ прежде полученными условіями уравновѣшенія центробѣжныхъ силъ.

84. ***Выполненіе такого уравновѣшенія на практикѣ.*** Приблизительное уравновѣшеніе вращающихся частей машинъ достигается тѣмъ, что имъ придаютъ форму тѣлъ вращенія; для этого ихъ обтачиваютъ на токарномъ станкѣ. Но такое уравновѣшеніе было бы вполнѣ совершеннымъ только въ случаѣ полной однородности матеріала, чего въ дѣйствительности никогда не бываетъ. Поэтому, не смотря на форму тѣла вращенія, въ обточенныхъ частяхъ машинъ центръ тяжести ихъ не лежитъ на оси вращенія, и эта ось не есть главная ось. Для окончательнаго выполненія условій уравновѣшенія, дѣлаютъ дополнительныя поправки, при помощи ряда попытокъ, руководствуясь слѣдующими пріемами.

Если тѣло можетъ свободно вращаться около оси O, и центръ тяжести его G не совпадаетъ съ осью вращенія, то будетъ положеніе устойчиваго равновѣсія, при которомъ центръ тяжести занимаетъ самое низкое изъ возможныхъ для него положеній; тѣло будетъ всегда стремиться установиться въ этомъ положеніи. Нужно спиливать часть матеріала со стороны центра тяжести до тѣхъ поръ, пока не исчезнетъ положеніе устойчиваго равновѣсія, и всѣ положенія будутъ одинаково безразличны; если достигнемъ этого, то имѣемъ совпаденіе центра тяжести съ осью вращенія.

Остается достигнуть того, чтобы ось вращенія была главной осью. Для этого нужно имѣть какой-нибудь признакъ, указывающій на такое несовпаденіе; онъ заключается въ ударахъ на опоры; эти удары прекращаются, если ось вращенія сдѣлается главной осью. Вотъ какъ выполняется это уравновѣшеніе для вагонныхъ скатовъ на желѣзной дорогѣ London and North Western Railway (фиг. 77). Вагонный скатъ (т. е. ось съ заклиненными на ней двумя колесами) располагается на двухъ подшипникахъ A, B, которые поставлены на рессоры C и D; затѣмъ особымъ двигателемъ, присоединеннымъ къ шейкѣ вала, ось приводится во вращеніе съ тою же скоростью, съ которой оно будетъ вертѣться въ курьерскомъ поѣздѣ, (т. е. 465 оборотовъ въ минуту для скорости 60 миль въ часъ и 618 оборотовъ для скорости 80 миль въ часъ). Неуравновѣшенная ось будетъ производить на подшипники удары, которые проявятся качаніемъ



Фиг. 77.

рессоръ. Нужно спиливать часть матеріала въ нѣкоторыхъ мѣстахъ, или прибавлять небольшіе грузы въ другихъ, пока не достигнемъ полнаго прекращенія качаній *).

Хорошее уравновѣшеніе вагонныхъ скатовъ очень помогаетъ плавности хода вагона и уничтоженію въ немъ качаній и дрожаній, непріятно дѣйствующихъ на нервы.

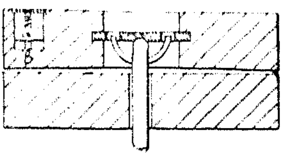
85. *Звукъ оси.* Въ машинахъ неуравновѣшенныя части производятъ при каждомъ оборотѣ удары, вызываютъ стуки и особый звукъ машинъ; высота его опредѣляется числомъ ударовъ въ секунду. Она тѣмъ больше, чѣмъ больше число оборотовъ въ минуту. Поэтому машины разнаго рода производятъ особые характерные для нихъ звуки; здѣсь можно указать на пѣніе шведскихъ сливкоотдѣлителей и турбинъ Лаваля, которые дѣлаютъ отъ 15.000 до 30.000 оборотовъ въ минуту.

Высота звука, издаваемаго вращающимися частями машинъ и физическихъ приборовъ, можетъ быть примѣнена для опредѣленія ихъ скорости вращенія. Это было въ первый разъ сдѣлано Фуко, при его опытахъ для опредѣленія скорости свѣта. Существенную часть прибора составляло быстро вращающееся зеркало; Фуко съ намѣреніемъ уравновѣсилъ ось его не вполнѣ, чтобы имѣть звукъ оси („son de l'axe“), по которому и опредѣлялъ скорость вращенія.

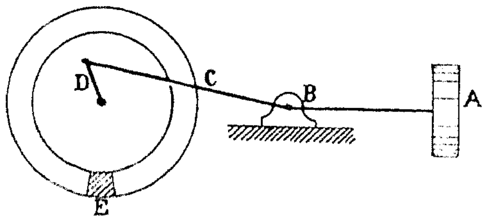
---

*) Подобные же приборы примѣняются фирмами, изготовляющими электрическія машины, для уравновѣшенія якорей динамо-машинъ. Рисунки прибора, примѣняемаго Всеобщей Компаніей Электричества, см. въ книгѣ: Stoola. Die Dampfturbinen. 3-е изданіе, стр. 255, 256. Также Эйерманъ. Паровыя турбины, стр. 124.

86. *Уравновѣшеніе силъ инерціи въ жерновахъ* (фиг. 78). Обыкновенно нижній камень (лежнякъ) неподвиженъ, а верхній (бѣгунъ) вращается на вертикальной оси, на которую онъ опирается шаровой поверхностью, такъ что можетъ качаться на опорѣ, чтобы въ случаѣ нужды могъ безъ порчи пройти надъ препятствіемъ, попавшимъ въ зазоръ между жерновами. При нормальномъ ходѣ этотъ зазоръ долженъ быть одинаковъ по всей окружности; иначе жерновъ будетъ молоть неровно, и даже можетъ случиться, что верхній камень будетъ царапать нижній, а стираемая каменная пыль примѣшается къ мукѣ. Для сохраненія постоянства этого зазора бѣгунъ долженъ быть



Фиг. 78.



Фиг. 79.

уравновѣшенъ на своей оси, т. е. должны быть соблюдены два условія, приведенныя въ n° 82. Послѣ первоначальнаго изготовленія бѣгуна, его пускаютъ въ ходъ и, наблюдая неправильности движенія, постепенно исправляютъ ихъ, или высверливая дыры въ разныхъ мѣстахъ камня, или нагружая нѣкоторыя мѣста свинцомъ, залитымъ въ углубленія камня. Это дѣлаютъ до тѣхъ поръ, пока не получится совершенно правильный ходъ. Предлагали для уравновѣшенія помѣщать въ особыхъ углубленіяхъ грузики *a* на винтахъ b; поворачивая эти винты, можно перемѣщать немного грузы съ той или другой стороны и этимъ достигать точнаго уравновѣшенія.

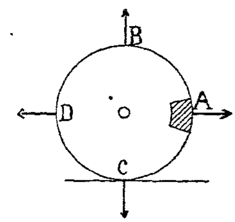
Вопросъ объ уравновѣшеніи жерновозъ имѣлъ особое значеніе въ прежнее время, когда на крупныхъ мельницахъ примѣнялось много жерновозъ съ огромными, тяжелыми камнями. Но теперь жернова почти совсѣмъ вытѣснены изъ употребленія на усовершенствованныхъ мельницахъ и замѣнены валковыми поставами.

87. *Уравновѣшеніе силъ инерціи кривошипнаго механизма. Паровозы.* Въ механизмѣ паровоза (фиг. 79) развиваются силы инерціи поршня со штокомъ A, крестовины съ

ползуномъ B, шатуна C и кривошипа D. Дѣйствіе этихъ силъ было замѣчено, какъ только начали увеличивать скорость движенія поѣздовъ и размѣры паровозовъ; тогда получились значительныя силы инерціи, которыя портили рельсы и весь путь, сообщали паровозу качку и разныя неправильности движенія, иногда даже вызывали сходъ съ рельсовъ. Пришлось позаботиться объ уравновѣшеніи силъ инерціи и съ этой цѣлью начали ставить противувѣсы E на колесахъ паровоза. Уже Стифенсонъ употреблялъ это средство, и скоро примѣненіе противувѣсовъ сдѣлалось общераспространеннымъ.

Польза противувѣсовъ наглядно демонстрируется опытомъ, который былъ первый разъ произведенъ въ 1847 г. инженеромъ Ноллау. Подвѣсивъ паровозъ (безъ противувѣсовъ) на четырехъ цѣпяхъ, затопили его котелъ и пустили паръ въ цилиндры. Получились сильныя качанія паровоза, которыя легко можно было записать на особомъ чертящемъ приборѣ. Затѣмъ поставили противувѣсы и этимъ достигли значительнаго уменьшенія колебаній.

Противувѣсъ при движеніи паровоза даетъ центробѣжную силу, посредствомъ которой стараются уравновѣсить прочія силы инерціи. Не трудно видѣть, что этимъ путемъ нельзя достигнуть полнаго и точнаго уравновѣшенія всѣхъ силъ инерціи кривошипнаго механизма. Изъ нихъ наибольшія величины имѣютъ силы инерціи поршня A и крестовины B; но эти силы горизонтальны, и ихъ нельзя уравновѣсить вполнѣ центробѣжной силой противувѣса, которая идетъ по радіусу колеса и имѣетъ какъ горизонтальную, такъ и вертикальную слагающія. Это было хорошо видно при опытахъ Ноллау съ подвѣшеннымъ паровозомъ. Сначала въ немъ были поставлены небольшіе противувѣсы, которые почти уничтожили вертикальныя колебанія паровоза, но горизонтальныя колебанія еще были значительны. Затѣмъ, постепенно увеличивая противувѣсы, уничтожили горизонтальныя колебанія, но при этомъ вновь появились вертикальныя колебанія, даже бо́льшія тѣхъ, которыя имѣлись при отсутствіи противувѣсовъ. Поэтому на практикѣ ограничиваются неполнымъ уравновѣшеніемъ силъ инерціи. Иногда довольствовались, только уравновѣшеніемъ вертикальныхъ силъ инерціи; оказалось что этого недостаточно, такъ какъ тогда остается значительная неуравновѣшенная часть горизонтальныхъ силъ инерціи и движеніе паровоза очень неспокойно. Пробовали ставить такіе тяжелые противувѣсы, что въ положеніи A (фиг. 80) центробѣжная сила ихъ вполнѣ уравновѣшиваетъ горизонтальныя силы инерціи. Такъ было сдѣлано при введеніи, въ половинѣ прошлаго столѣтія, паровозовъ Крэмптона, предназначенныхъ для курьерскихъ поѣздовъ. Но тогда въ положеніяхъ B и C, когда центробѣжная сила противувѣса становится вертикальной, она оказывалась почти вовсе не уравновѣшенной; въ положеніи C она сильно портитъ рельсы, а въ положеніи B вызываетъ опасное подпрыгиваніе. И дѣйствительно, при первыхъ же пробахъ паровозовъ Крэмптона съ такими противувѣсами получился сходъ съ рельсовъ; пришлось уменьшить противувѣсы, и теперь имъ всегда придаютъ вѣсъ меньшій, чѣмъ тотъ, который требуется для полнаго уравновѣшенія горизонтальныхъ силъ инерціи.



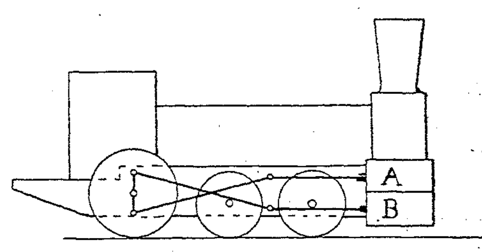
Фиг. 80.

Въ качествѣ примѣра мы укажемъ на правила, принятыя на самомъ крупномъ американскомъ паровозномъ заводѣ—Болдуина въ Филадельфіи *):

Уравновѣшиваютъ полностью вертикальныя силы инерціи кривошипнаго механизма. Что касается до горизонтальныхъ силъ, то уравновѣшиваютъ только часть ихъ, а именно:

$^2/_3$ для машинъ съ одиночнымъ расширеніемъ пара и $^3/_4$ для машинъ компаундъ.

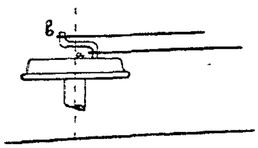
Другіе способы уравновѣшенія силъ инерціи въ паровозахъ. Итакъ вращающіеся противувѣсы не годятся для точнаго уравновѣшенія силъ инерціи поршня и крестовины. Эти силы горизонтальныя, и для уравновѣшенія ихъ нужны тоже горизонтальныя силы. Такой пріемъ уравновѣшенія былъ примѣненъ Гаселемъ въ его паровозахъ „Duplex“ (фиг. 81). Съ каждой стороны паровоза помѣщены, одинъ надъ другимъ, два паровыхъ цилиндра, A, B, дѣйствующіе на кривошипы, которые расположены на 180 градусовъ одинъ отъ другого. Поэтому движенія поршней цилиндровъ A и B прямо противуположны, и ихъ горизонтальныя силы инерціи почти въ точности взаимно уравновѣшиваются, не требуя противувѣсовъ.



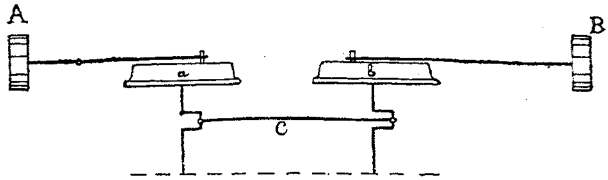
Фиг. 81.

*) Заимствуемъ ихъ изъ книги Dalby: The Balancing of Engines.

Для выполненія этой идеи Гасвель долженъ былъ примѣнять конструкцію кривошипа съ обратнымъ кривошипомъ (фиг. 82); одинъ поршень дѣйствуетъ на шейку кривошипа *a*, другой на обратный кривошипъ *b*. Очень трудно достигнуть прочности такой конструкціи; въ особенности скоро разстраивается соединеніе колѣнной части *ab* съ колесомъ паровоза. Поэтому конструкція Гасвеля недолго удержалась въ практикѣ.



Фиг. 82.



Фиг. 83.

Вмѣсто нея предлагаютъ для той же цѣли примѣнять конструкцію, показанную на фиг. 83; поршни A и B дѣйствуютъ на два различныхъ колеса паровоза *a* и *b*; соединительный шатунъ C связываетъ движеніе этихъ колесъ такъ, что направленія движенія A и B прямо противуположны.

Теперь нерѣдки случаи примѣненія въ паровозахъ четырехъ паровыхъ цилиндровъ, расположенныхъ рядомъ (два наружныхъ цилиндра, два внутреннихъ) и дѣйствующихъ посредствомъ кривошиповъ и колѣнъ на одну ось. Это тотъ же способъ расположенія и уравновѣшенія, какъ общепринятый для пароходныхъ машинъ.

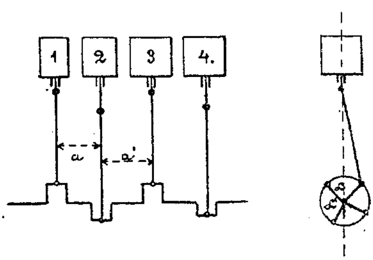
88. *Уравновѣшеніе силъ инерціи въ пароходныхъ машинахъ.* Съ увеличеніемъ скорости движенія пароходныхъ машинъ рѣзко выступило явленіе, на которое прежде не обращали вниманія; неуравновѣшенныя силы инерціи, производя удары на корпусъ судна, сообщаютъ этому корпусу колебанія; даже крупное металлическое судно дрожитъ какъ камертонъ, образуя два или болѣе узловъ. Эти колебанія иногда становятся невыносимыми, и теперь уравновѣшеніе силъ инерціи въ крупныхъ пароходныхъ машинахъ совершенно необходимо.

Эти машины имѣютъ обыкновеновенно 4 рядомъ стоящіе цилиндра (фиг. 84), дѣйствующіе на одинъ и тотъ же валъ. Уравновѣшиваніе силъ инерціи поступательно движущихся частей здѣсь производится по такъ называемой системѣ

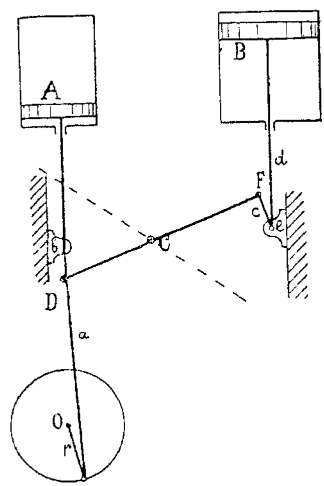
ТЭЙЛОРЪ-ШЛИКА.

Оказывается, что при четырехъ цилиндрахъ можно достигнуть почти полнаго уравновѣшенія указанныхъ силъ, безъ противувѣсовъ, т. е. эти силы инерціи уравновѣшиваются **взаимно**. Для этого нужно только извѣстнымъ образомъ подобрать слѣдующія величины: a) углы α между кривошипами, на которые дѣйствуютъ поршни четырехъ цилиндровъ, b) разстоянія a между осями цилиндровъ *).

89. *Другой способъ уравновѣшенія силъ инерціи въ паровыхъ машинахъ.* Способъ Тэйлоръ-Шликъ даетъ неточное уравновѣшеніе. Многіе корабельные инженеры не довольствуются этимъ приближеніемъ, такъ какъ оно не вполнѣ уничтожаетъ вредныя колебанія корпуса судна; стараются придумать конструкціи, обезпечивающія болѣе точное уравновѣшиваніе. Изъ нихъ укажемъ на конструкцію Мэкъ-Алпайнъ (фиг. 85); здѣсь для уравновѣшенія достаточно двухъ цилиндровъ, тогда какъ система Тэйлоръ-Шликъ требуетъ не менѣе четырехъ. Поршень A помощію шатуна a дѣйствуетъ непосредственно на кривошипъ r пароходнаго вала O. Движеніе другого поршня B напра-



Фиг. 84.



Фиг. 85.

вляется штокомъ d и ползуномъ e; это движеніе связано съ перемѣщеніемъ A помощію качающагося коромысла DCF (C— ось качанія) и двухъ серегъ b и c. Вслѣдствіе такой связи поршни A и B движутся по противуположнымъ направленіямъ, и получается хорошее взаимное уравновѣшеніе ихъ силъ инерціи.

Къ сожалѣнію эта конструкція требуетъ примѣненія ко-

*) Подробности см. Lorenz: Dynamik der Kurbelgetriebe. 1901.—Шубертъ: Теорія уравновѣшенія силъ инерціи. 1902.

ромысла DCF, т. е. длинной части, которая подвергается изгибу, а это составляетъ большой недостатокъ для быстроходныхъ машинъ. Упругія деформаціи, вызываемыя изгибомъ, довольно велики, и при большихъ скоростяхъ въ коромыслѣ могутъ получиться замѣтныя и очень опасныя колебанія. Вслѣдствіе этого коромысла, которыя въ прежнее время часто примѣнялись въ паровыхъ машинахъ, двигавшихся медленно, начали исчезать, какъ только стали примѣнять большія скорости, и въ новѣйшихъ конструкціяхъ вовсе не примѣняются. Было бы ошибкой опять вернуться къ машинамъ съ коромыслами.

Лебединой пѣснью машинъ съ коромысломъ была огромная паровая машина Корлисса, фигурировавшая на Филадельфійской выставкѣ 1876 года.

Систему Мэкъ Алпайнъ недавно горячо отстаивалъ адмиралъ Мельвиль, главный инженеръ флота Сѣверо-Американскихъ Соединенныхъ Штатовъ. На возраженія англійскихъ конструкторовъ Мельвиль съ заносчивостью отвѣчалъ: „мы, живущіе по сю сторону океана, хорошо знаемъ коромысла и не боимся ихъ“. Правда, въ Америкѣ очень распространено примѣненіе коромысла въ пароходныхъ машинахъ, но исключительно для машинъ рѣчныхъ, колесныхъ пароходовъ; а эти машины тихоходныя. Годное для нихъ нельзя примѣнять къ быстроходнымъ машинамъ.

90. *Силы инерціи въ заводскихъ паровыхъ машинахъ.* Эти машины прикрѣпляются болтами къ фундаментамъ, на которые и передаются всѣ удары. Такъ какъ фундаменты всегда очень массивные, то сотрясеній не замѣчается, если даже силы инерціи вовсе не уравновѣшены, но тѣмъ не менѣе удары есть, и они разстраиваютъ конструкцію. Поэтому полезно уравновѣшивать силы инерціи и въ заводскихъ машинахъ, если они быстроходныя; теперь это обыкновенно и дѣлаютъ. Примѣромъ результатовъ, которые при этомъ достигаются, можетъ служить одна изъ машинъ, представленныхъ на выставкѣ 1893 года въ Чикаго, а именно машина завода Harrisburg Machine C°, дѣлавшая 275 оборотовъ въ минуту. Чтобы демонстрировать совершенство уравновѣшенія ея, были сняты фундаментные болты; машина была приподнята и стояла надъ фундаментомъ на четырехъ чугунныхъ столбикахъ, безъ всякаго прикрѣпленія. Въ такомъ видѣ она ходила, безъ всякихъ колебаній и сотрясеній. Правда она при этомъ работала въ холостую, но вѣдь силы инерціи при холостомъ ходѣ тѣ же по величинѣ, какъ при полной нагрузкѣ.

СЕДЬМАЯ БЕСѢДА.

Теорема о подобіи въ Динамикѣ.

91. Эта теорема выражаетъ условія, при которыхъ двѣ системы, геометрически подобныя, будутъ получать геометрически подобныя движенія, т. е. одна система будетъ какъ бы копировать движеніе другой, но только измѣнивши масштабъ.

Теорема эта была найдена Ньютономъ и изложена въ Principia въ той главѣ этого сочиненія, которая говоритъ о сопротивленіи жидкостей движенію *); законъ этого сопротивленія выведенъ Ньютономъ при помощи теоремы о подобіи. Сама теорема получается у Ньютона скорѣе какъ геніальная интуиція, чѣмъ какъ результатъ строгаго вывода. Почти двѣсти лѣтъ послѣ того Бертранъ показалъ, что эта теорема есть непосредственное слѣдствіе Даламберова Начала.

92. Для вывода ея, сначала покажемъ, въ какой формѣ изображается Даламберово Начало, если примѣнить къ выраженію всѣхъ обстоятельствъ движенія Декартовы прямоугольныя координаты и разсматривать всякую систему, какъ совокупность матеріальныхъ точекъ.

Координаты любой изъ этихъ точекъ, имѣющей массу m, назовемъ x, y, z, а слагающія внѣшней силы, приложенной къ той же точкѣ, обозначимъ черезъ

$$X, Y, Z.$$

Прежде всего выразимъ условія равновѣсія этой матеріальной системы. Если для нашей точки m назовемъ возможныя перемѣщенія черезъ

$$\delta x, \delta y, \delta z,$$

то работа внѣшнихъ силъ для дозволяемаго связями перемѣщенія будетъ

$$X.\delta x + Y.\delta y + Z.\delta z.$$

---

*) II-я книга 7-й отдѣлъ, стр. 317 нѣмецкаго перевода Вольферса.

Составимъ такія же выраженія работъ для всѣхъ точекъ, образующихъ нашу систему, и сложимъ эти выраженія. Результатъ сложенія обозначимъ Σ, т. е.

$$\Sigma\left\{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right\}.$$

На основаніи Начала Возможныхъ Перемѣщеній эта сумма работъ должна быть равна нулю, слѣд.

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Это уравненіе выражаетъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній.

93. Уравненія движенія получимъ, если въ найденномъ условіи равновѣсія внѣшнія силы замѣнимъ потерянными силами, т. е. равнодѣйствующими изъ внѣшнихъ силъ и силъ инерціи.

Но если x, y, z представляютъ перемѣнныя (текущія) координаты движущейся точки, то проекціи ускоренія ея на оси будутъ

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}.$$

А проекціи силъ инерціи, по опредѣленію, которое было дано въ n° 58, изобразятся отрицательными произведеніями массы m на эти ускоренія, т. е.

$$-m.\frac{d^2x}{dt^2},\ -m.\frac{d^2y}{dt^2},\ -m.\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Потерянныя силы будутъ имѣть проекціи

$$X - m.\frac{d^2x}{dt^2},\ Y - m.\frac{d^2y}{dt^2},\ Z - m.\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ихъ нужно подставить въ уравненіе равновѣсія (20) вмѣсто внѣшнихъ силъ X, Y, Z, и получимъ уравненія движенія

$$\Sigma.m.\left\{\left(X - m.\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m.\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \right.$$
$$\left. + \left(Z - m.\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Это и будетъ та форма Даламберова Начала, которую получаетъ этотъ законъ, если примѣняемъ Декартовы координаты и разсматриваемъ систему, какъ совокупность матеріальныхъ точекъ.

94. Вообразимъ себѣ теперь другую систему, которая геометрически подобна первой системѣ, но отличается отъ нея размѣрами, а также массами матеріальныхъ точекъ. Пусть отношеніе линейныхъ размѣровъ новой системы къ размѣрамъ прежней будетъ λ, а отношеніе массъ соотвѣтственныхъ ихъ точекъ назовемъ черезъ μ. Мы желаемъ, чтобы движенія этихъ системъ были геометрически подобны; слѣдовательно сходственныя точки двухъ системъ должны двигаться подобно. Опредѣлимъ болѣе полно, что слѣдуетъ подразумѣвать подъ этимъ понятіемъ „подобныя движенія". Мы сказали, что вторая система должна копировать движеніе первой, измѣнивши масштабъ; это измѣненіе должно равняться отношенію линейныхъ размѣровъ, т. е. λ. Если текущія координаты частицы m первой системы суть

$$x,\ y,\ z,$$

то координаты соотвѣтственной точки второй системы x^1, y^1, z^1 должны имѣть значенія

$$x^1 = \lambda x,\ y^1 = \lambda y,\ z^1 = \lambda z,$$

т. е. должно быть соотношеніе

$$\frac{x^1}{x} = \frac{y^1}{y} = \frac{z^1}{z} = \lambda = \text{const}.$$

Тогда перемѣщенія второй системы будутъ параллельны перемѣщеніямъ первой системы и въ λ разъ больше. Въ этомъ и состоитъ подобіе перемѣщеній двухъ системъ.

Теперь нужно ввести условіе относительно того, съ какой скоростью вторая система будетъ копировать перемѣщенія первой. Мы назначимъ, что соотвѣтственныя части путей проходятся двумя системами не въ одно и то же время; пусть вторая система употребляетъ для этого время въ τ разъ большее, чѣмъ первая; τ число произвольное, но постоянное во все время движенія и одинаковое для всѣхъ точекъ, составляющихъ систему. И такъ если въ первой системѣ частица массы m для времени t имѣетъ координаты x, y, z, то во второй системѣ соотвѣтственная частица, имѣющая массу $m.\mu$, получитъ, для времени $t^1 = t.\tau$, координаты

$$\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z.$$

Теперь мы вполнѣ опредѣлили, что называемъ подобными движеніями двухъ системъ. Какъ слѣдствіе этого опредѣленія получаемъ соотношенія скоростей и ускореній сходственныхъ точекъ двухъ системъ; при этомъ сравниваемъ скорости и ускоренія, получающіяся для соотвѣтственныхъ временъ, т. е. для первой системы беремъ время t, а для второй

$$t^1 = \tau . t.$$

Такъ какъ для этихъ временъ имѣемъ:

$$x^1 = \lambda x,$$

то, дифференцируя и помня, что τ, λ не зависятъ отъ времени, получимъ:

$$dt^1 = \tau . dt$$
$$dx^1 = \lambda . dx.$$

Слѣд.

$$\frac{dx^1}{dt^1} = \frac{\lambda}{\tau} \cdot \frac{dx}{dt} \quad . \; . \; . \; (22),$$

т. е. отношеніе скоростей

$$\frac{dx^1}{dt^1} \text{ и } \frac{dx}{dt}$$

для сходственныхъ временъ равно постоянной и одинаковой для всѣхъ частицъ дроби

$$\frac{\lambda}{\tau}.$$

Дифференцируя уравненіе (22), получимъ:

$$d\left(\frac{dx^1}{dt^1}\right) = \frac{\lambda}{\tau} \cdot d\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

дѣля обѣ части этого уравненія на

$$dt^1,$$

или, что все равно, на

$$\tau . dt,$$

найдемъ

$$\frac{d\left(\frac{dx^1}{dt^1}\right)}{dt^1} = \frac{\lambda}{\tau^2} \cdot \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt},$$

т. е.

$$\frac{d^2x^1}{dt^{1\,2}} = \frac{\lambda}{\tau^2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad . \; . \; . \; (23).$$

Слѣдовательно отношеніе ускореній соотвѣтственныхъ точекъ двухъ системъ, для соотвѣтственныхъ временъ, представляется постояннымъ и одинаковымъ для всѣхъ частицъ множителемъ

$$\frac{\lambda}{\tau^2}.$$

Отношеніе силъ инерціи, т. е. произведеній изъ массы на ускореніе, будетъ

$$\frac{\mu.\lambda}{\tau^2}.$$

Таковы соотношенія въ тѣхъ движеніяхъ, которыя мы назвали подобными. Посмотримъ, какія внѣшнія силы должны быть приложены къ этимъ системамъ, чтобы онѣ получили подобныя движенія. Если въ первой системѣ на точку m дѣйствуютъ силы

$$X,\ Y,\ Z,$$

то какія силы X^1, Y^1, Z^1 должны быть приложены къ соотвѣтствующей точкѣ второй системы?

Для отвѣта на этотъ вопросъ обратимся къ уравненію (21), изображающему движеніе первой системы, и посмотримъ, какъ нужно преобразовать его, чтобы получить движеніе второй системы.

Замѣтимъ, что вторая система должна быть подобна первой во всѣхъ отношеніяхъ, т. е. не только части второй системы должны быть подобны частямъ первой системы, но должно соблюдаться также и подобіе связей. Слѣдовательно возможныя перемѣщенія второй системы могутъ отличаться отъ возможныхъ перемѣщеній

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z$$

первой системы только множителемъ, общимъ для всѣхъ частицъ; его можно отбросить.

Затѣмъ вмѣсто силъ инерціи

$$-m.\frac{d^2x}{dt^2},\ \ldots$$

во второй системѣ появятся тѣ же величины, умноженныя на

$$\frac{\lambda\,.\,\mu}{\tau^2}.$$

Вмѣсто внѣшнихъ силъ X, Y, Z во второй системѣ будутъ силы

$$X^1,\ Y^1,\ Z^1.$$

Такимъ образомъ уравненіе движенія второй системы будетъ

$$\Sigma\left[\left(X^1-\frac{\lambda\mu}{\tau^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y^1-\frac{\lambda\mu}{\tau^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\right.$$
$$\left.+\left(Z^1-\frac{\lambda\mu}{\tau^2}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0\ .\ .\ .\ (24).$$

Нужно найти, какія силы X^1, Y^1, Z^1 удовлетворяютъ этому уравненію; это будутъ силы, сообщающія второй системѣ движеніе, подобное тому движенію первой системы, которое опредѣляется уравненіемъ (21). Но сравнивая уравненія (24) и (21) между собою, видимъ, что если уравненіе (21) удовлетворено, то можно удовлетворить (24) уравненіе, дѣлая положеніе

$$X^1=\gamma X;\ Y^1=\gamma Y;\ Z^1=\gamma Z$$

и полагая при этомъ

$$\gamma=\frac{\lambda\mu}{\tau^2}.$$

На самомъ дѣлѣ при такомъ положеніи (24) дѣлается вполнѣ согласнымъ съ (21), за исключеніемъ лишь постояннаго множителя

$$\gamma=\frac{\lambda\mu}{\tau^2},$$

который можно сократить, такъ какъ этотъ множитель входитъ во всѣ члены уравненія.

Итакъ, силы, которыя сообщаютъ второй системѣ движеніе, подобное движенію первой системы, должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

$$1)\ X^1=\gamma X, Y^1=\gamma Y, Z^1=\gamma Z$$
$$2)\ \gamma=\frac{\lambda\mu}{\tau^2},$$

т. е. 1) Внѣшнія силы второй системы должны быть параллельны и пропорціональны соотвѣтствующимъ силамъ первой системы.

2) Коеффиціентъ пропорціональности силъ долженъ равняться произведенію изъ отношенія линейныхъ размѣровъ двухъ системъ на отношеніе соотвѣтственныхъ массъ этихъ системъ, раздѣленному на квадратъ отношенія соотвѣтствующихъ временъ.

Въ этомъ и заключается Ньютонова теорема о подобіи.

Для силъ связи конечно получится такое же соотношеніе, какъ указанное для внѣшнихъ силъ.

Работа получается какъ произведеніе силы на перемѣщеніе; поэтому отношеніе соотвѣтственныхъ работъ для двухъ подобныхъ системъ изобразится дробью

$$\frac{\lambda\mu}{\tau^2}.\lambda = \frac{\lambda^2\mu}{\tau^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Въ техникѣ имѣетъ особое значеніе величина работы, производимой машиной въ единицу времени; она выражается обыкновенно въ паровыхъ лошадяхъ. Отношеніе такихъ работъ для двухъ подобныхъ системъ получится, раздѣляя дробь (25) на отношеніе временъ τ, и будетъ

$$\frac{\lambda^2\mu}{\tau^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Эту совокупность отношеній дополнимъ вышеуказанными отношеніями скоростей

$$\frac{\lambda}{\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

и ускореній

$$\frac{\lambda}{\tau^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Другое доказательство этой теоремы. Мы можемъ придти къ тому же результату, подходя къ вопросу съ совершенно другой точки зрѣнія, а именно разсматривая измѣренія величинъ, входящихъ въ уравненія движенія.

Въ уравненія движенія входятъ разнородныя величины; изъ нихъ три величины основныя, а именно длина (L), масса (M) и время (T); прочія же производныя.

Измѣреніе ускоренія есть

$$M.L.T^{-2},$$

а такъ какъ сила равна произведенію массы на ускореніе, то измѣреніе ея будетъ

$$M.L.T^{-2}.$$

Вообразимъ себѣ любой случай движенія системы, опредѣляемый однимъ или нѣсколькими уравненіями. Измѣнимъ единицы, которыми измѣряются величины, входящія въ уравненія движенія; тогда эти величины будутъ изображаться другими числами, чѣмъ прежде, сообразно съ измѣненіемъ единицъ.

Назначимъ слѣдующее измѣненіе единицъ: уменьшимъ единицу длины въ λ разъ, единицу массъ въ μ разъ и единицу времени въ τ разъ. Тогда единица для измѣренія силъ уменьшится въ

$$\frac{\lambda\mu}{\tau^2} \text{ разъ.}$$

Числа же, представляющія величины длины массъ, временъ и силъ, увеличатся въ тѣхъ же отношеніяхъ, т. е. въ

$$\lambda,\ \mu,\ \tau,\ \frac{\lambda\mu}{\tau^2}\ \text{разъ}.$$

Эти новыя числа должны удовлетворять прежнимъ уравненіямъ движенія, такъ какъ они представляютъ данныя, относящіяся къ движенію прежней системы. Итакъ, если въ любомъ уравненіи движенія мы всѣ длины умножимъ на произвольную постоянную величину λ, всѣ массы на μ, всѣ времена на τ и всѣ силы на

$$\frac{\lambda\mu}{\tau^2},$$

то уравненіе по прежнему будетъ удовлетворено.

Но мы можемъ смотрѣть на это видоизмѣненное уравненіе съ другой точки зрѣнія. Прежде мы считали, что оно изображаетъ движеніе прежней системы, съ измѣненіемъ лишь единицъ, которыми измѣряются величины. Теперь предположимъ, что единицы остались прежнія. Мы можемъ толковать видоизмѣненное уравненіе, какъ уравненіе движенія другой системы, которая получается изъ первоначальной путемъ увеличенія всѣхъ длинъ въ λ разъ, всѣхъ массъ въ μ разъ, всѣхъ временъ въ τ разъ и всѣхъ силъ въ

$$\frac{\lambda\mu}{\tau^2}\ \text{разъ}.$$

Эта новая система подобна первоначальной, и сравненіе ихъ уравненій движенія показываетъ, что новое движеніе подобно прежнему движенію. Итакъ получаемъ вновь теорему о подобіи; условіе подобія, т. е. соотношеніе силъ конечно получилось то же самое, что и въ предъидущемъ способѣ доказательства.

Изложенное второе доказательство показываетъ, что законъ подобія въ Динамикѣ представляетъ непосредственное слѣдствіе необходимой однородности всѣхъ членовъ, входящихъ въ какое угодно уравненіе; его можно называть „закономъ однородности". Отсюда легко вывести распространеніе этого закона на различные вопросы Математической Физики *).

---

*) Теорема о подобіи въ Теоріи Тепла была выведена Фурье; этотъ вопросъ разобранъ въ мало извѣстномъ мемуарѣ его, носящемъ заглавіе: Mémoire sur la distinction des racines imaginaires etc. См. въ собраніи сочиненій Фурье: Oeuvres de Fourier: Tome II, p.p. 135—144. Эта работа относится къ

92. *Приложенія теоремы о подобіи.* Эти приложенія многочисленны и даютъ очень важные результаты, такъ что одинъ изъ теоретиковъ-механиковъ справедливо называетъ теорему о подобіи „великимъ принципомъ подобія". Мы приведемъ примѣры изъ разнообразныхъ областей науки и техники.

Центральное движеніе. Пусть система состоитъ изъ матеріальной точки m, движущейся подъ вліяніемъ притяженія къ неподвижному центру S; сила притяженія пропорціональна величинѣ массы m и разстоянію r, возвышенному въ степень n. Другая система ей подобна. Какія указанія на соотношенія движеній этихъ системъ дастъ теорема о подобіи?

Она указываетъ, что отношеніе силъ должно быть

$$\frac{\lambda \cdot \mu}{\tau^2}.$$

Съ другой стороны, заданный законъ притяженія указываетъ, что отношеніе силъ въ двухъ системахъ составляетъ

$$\mu \cdot \lambda^n.$$

Слѣдовательно имѣемъ

$$\frac{\lambda\mu}{\tau^2} = \mu \cdot \lambda^n,$$

откуда

$$\tau^2 = \lambda^{1-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30).$$

Здѣсь τ представляетъ отношеніе соотвѣтствующихъ временъ; если напримѣръ точка m описываетъ сомкнутую кривую (орбиту) около притягивающаго центра S, то τ означаетъ отношеніе временъ обращенія массъ около центра S. Уравненіе (30) представляетъ слѣдующій законъ: „квадраты временъ обращеній относятся какъ (1—n)—ныя степени линейныхъ размѣровъ орбитъ".

Въ частномъ случаѣ, когда

$$n = -2,$$

т. е. когда притяженіе обратно пропорціонально квадратамъ разстояній, получаемъ

$$\tau^2 = \lambda^3,$$

т. е. находимъ третій законъ Кеплера: „квадраты временъ обра-

---

1827 году, т. е. появилась пятью годами позже, чѣмъ Théorie analytique de la chaleur.

См. также статью J. Bertrand: Sur l'homogéneité dans les formules de Physique. Comptes Rendus. T. 86, p. 916 (1878 года). Здѣсь разсмотрѣно подобіе въ Теоріи Тепла и Теоріи Электричества.

щенія пропорціональны кубамъ среднихъ разстояній (т. е. полуосей эллиптическихъ орбитъ)".

Качанія маятника. Возьмемъ два геометрически подобныхъ маятника и заставимъ ихъ качаться въ двухъ различныхъ мѣстахъ земнаго шара, различающихся между собою величинами ускоренія тяжести. Отношеніе величинъ этихъ ускореній назовемъ черезъ g; тогда отношеніе силъ земнаго притяженія будетъ

$$\mu \cdot g$$

Но по теоремѣ подобія, отношеніе силъ есть

$$\frac{\mu.\lambda}{\tau^2}.$$

Слѣд.

$$\mu.g = \mu.\frac{\lambda}{\tau^2};$$

откуда

$$\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{g}}.$$

Здѣсь τ представляетъ отношеніе соотвѣтствующихъ временъ для двухъ маятниковъ, напр., отношеніе временъ качанія.

И такъ время качанія маятника прямо пропорціонально корню квадратному изъ длины маятника и обратно пропорціонально корню квадратному изъ ускоренія тяжести.

93. ***Акустика. Законъ Савара, дающій числа колебаній воздуха въ подобныхъ трубахъ произвольной формы.*** Здѣсь въ качествѣ движущей силы появляется упругость воздуха; она, при данной степени сгущенія или разрѣженія, пропорціональна площади, на которую производится давленіе. Слѣд. для подобныхъ трубъ отношеніе силъ равно квадрату отношенія линейныхъ размѣровъ. Уравнивая это выраженіе тому отношенію силъ, которое дается теоремой о подобіи, т. е.

$$\frac{\lambda\mu}{\tau^2},$$

получаемъ

$$\lambda^2 = \frac{\lambda\mu}{\tau^2}.$$

Но μ—отношеніе подобныхъ массъ воздуха равно кубу отношенія линейныхъ размѣровъ. Слѣд. послѣ подстановки найдемъ.

$$\tau = \lambda.$$

И такъ отношеніе сходственныхъ временъ, т. е. отношеніе чиселъ колебаній основныхъ звуковъ, издаваемыхъ трубами, равно отношенію линейныхъ размѣровъ трубъ.

94. ***Сопротивленіе воды или воздуха движенію твердыхъ тѣлъ.*** Вмѣсто того, чтобы разсматривать твердое тѣло, движущееся съ нѣкоторой скоростью V въ неподвижной средѣ, обратимъ движеніе: предположимъ, что твердое тѣло неподвижно, а на него течетъ вся среда, съ той же скоростью V, но въ обратномъ направленіи. Такое обращеніе движенія упрощаетъ вопросъ; мы теперь можемъ не обращать вниманія на массу твердаго тѣла; въ движеніи принимаютъ участіе только массы воздуха или другой среды. Разсмотримъ давленія этихъ движущихся жидкостей на твердое тѣло: это будутъ силы связи нашей системы.

Для силъ, при подобныхъ системахъ, имѣемъ отношеніе

$$\pi=\frac{\lambda\mu}{\tau^2}.$$

Отношеніе подобныхъ массъ двухъ движущихся жидкостей равно

$$\delta\lambda^3$$

(δ—отношеніе плотностей жидкостей). Слѣд. имѣемъ

$$\pi=\delta\cdot\frac{\lambda^4}{\tau^2}=\delta\lambda^2\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2$$

Но $\frac{\lambda}{\tau}$ есть отношеніе скоростей при подобныхъ движеніяхъ, а λ^2 равно отношенію поперечныхъ сѣченій подобныхъ тѣлъ. И такъ мы получаемъ, что силы сопротивленія воды или воздуха для подобныхъ тѣлъ относятся между собою какъ произведенія изъ плотности жидкости Λ на площадь поперечнаго сѣченія движущагося тѣла (Ω) и на квадратъ скорости (V^2). Это выводъ Ньютона. Выражая его алгебраическими знаками, получаемъ для силы сопротивленія (Q) формулу:

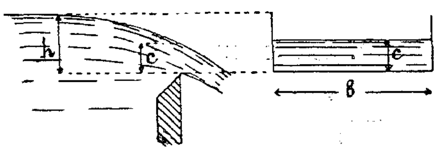
$$Q=k\ \Lambda.\ \Omega\ V^2\ .\ .\ .\ (31),$$

гдѣ k—коеффиціентъ одинаковый для всѣхъ жидкостей.

Замѣтимъ, что законъ, изображаемый формулой (31), относится только къ геометрически подобнымъ тѣламъ и мы не имѣемъ права распространять его на тѣла не подобныя. Прежде часто не обращали на это вниманіе и примѣняли формулу (31), какъ общій законъ сопротивленія для всякихъ тѣлъ; замѣчая, что въ формулу не входитъ длина тѣла, говорили: сопротивленіе пропорціонально площади поперечнаго сѣченія и не зависитъ отъ длины тѣла.

Такой выводъ невѣренъ и есть результатъ неправильнаго распространенія формулы (31) на тѣла не подобныя. Чтобы рѣзко выставить неправильность подобнаго расширенія закона за предѣлы его примѣнимости въ вопросѣ о сопротивленіи движенію судовъ, Фроудъ приводитъ слѣдующій доводъ къ нелѣпости: для геометрически подобныхъ судовъ можно, въ формулѣ, дающей отношеніе сопротивленій, вмѣсто λ^2 вставить, если угодно, отношеніе квадратовъ высотъ мачтъ. Однако никому не придетъ въ голову распространять этотъ выводъ на тѣла неподобныя и утверждать, что сопротивленіе вообще пропорціонально квадрату высоты мачты! На столько же нелогично и вышеуказанное распространеніе закона о пропорціональности сопротивленія поперечнымъ сѣченіямъ движущихся тѣлъ.

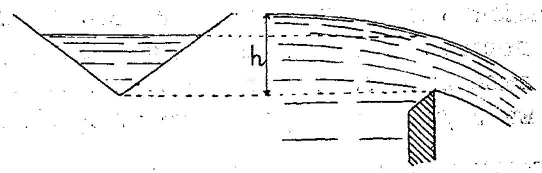
95. *Водосливъ Дэжемса Томсона.* При гидравлическихъ опытахъ количество протекающей воды часто измѣряется помощію водослива. Обыкновенно отверстіе водослива имѣетъ форму прямоугольника (фиг. 91); здѣсь ширина струи b постоянная, а толщина ея c и напоръ h надъ ребромъ водослива измѣняются съ измѣненіемъ количества протекающей воды.



Фиг. 91.

Размѣры b, c, h служатъ для опредѣленія количества воды, протекающей въ одну секунду. Но при разныхъ h какъ сѣченіе струи $b.c$, такъ и форма ея, и вообще всѣ обстоятельства движенія измѣняются безъ соблюденія подобія; поэтому здѣсь нельзя приложить нашу теорему. Теоретическій же разборъ получающагося движенія затруднителенъ. Приходится прибѣгнуть къ эксперименту; но здѣсь нужно произвести обширную серію опытовъ и находить количество протекающей воды для различныхъ постепенно измѣняющихся высотъ h; составивъ предварительно такую эмпирическую таблицу для даннаго водослива, можемъ затѣмъ пользоваться ею при дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ. Такимъ образомъ здѣсь необходима довольно продолжительная предварительная работа—градуированіе водослива, т. е. опредѣленіе расхода воды, который получается при разныхъ напорахъ h надъ ребромъ водослива.

Джемсъ Томсонъ предложилъ устраивать въ водосливахъ отверстіе не прямоугольной формы, а треугольное (фиг. 92). При этомъ, для разныхъ напоровъ h, сѣченія струй будутъ по-



Фиг. 92.

добные треугольники, и такое движеніе удовлетворяетъ закону подобія.

Въ этомъ вопросѣ можно принимать только одну внѣшнюю силу—вѣсъ жидкости [1]); для подобныхъ системъ отношеніе вѣсовъ будетъ

$$\lambda^3.$$

Уравнивая это общему соотношенію силъ въ подобныхъ системахъ, т. е.

$$\pi=\frac{\lambda\mu}{\tau^2},$$

и вставляя для отношенія массъ μ—отношеніе кубовъ сходственныхъ размѣровъ, получимъ

$$1=\frac{\lambda}{\tau^2},$$

откуда

$$\frac{\lambda}{\tau}=\sqrt{\lambda}.$$

Но $\frac{\lambda}{\tau}$ есть отношеніе скоростей; а такъ какъ количество воды, протекающей въ секунду, пропорціонально произведенію изъ скорости на площадь струи, то для подобныхъ системъ получаемъ отношеніе такихъ количествъ воды

$$\lambda^2.\sqrt{\lambda}=\lambda^{\frac{5}{2}}$$

Слѣдовательно: отношеніе количествъ протекающей воды равно отношенію сходственныхъ размѣровъ, возвышенному въ сте-

---

[1]) Если ребра водослива острые, какъ на нашей фигурѣ, то можно пренебречь треніемъ струи о стѣнки отверстія.

пень $^5/_2$. Сходственными размѣрами намъ будутъ служить напоры h надъ вершиной отверстія. И такъ количество воды, протекающей въ секунду, выразится формулой

$$Q=A.h^{\frac{5}{2}}$$

гдѣ A коеффиціентъ пропорціональности. Его опредѣлимъ изъ опыта; здѣсь достаточно произвести одинъ опытъ, для одной какой нибудь высоты h, т. е. градуировка прибора значительно проще, чѣмъ въ случаѣ прямоугольнаго отверстія водослива.

96. *Движеніе жидкостей въ трубахъ. Критическая скорость.* При движеніи по трубамъ воды и другихъ жидкостей онѣ встрѣчаютъ сопротивленіе, въ родѣ тренія. Изученіе этого явленія имѣетъ особое значеніе для устройства проводовъ воды, воздуха, нефти, керосина, для канализаціи и т. д.

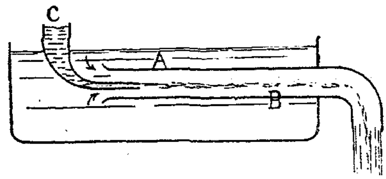
Опыты показали, что при небольшихъ скоростяхъ это сопротивленіе измѣняется пропорціонально первой степени скорости; при болѣе значительныхъ скоростяхъ находятъ другой законъ сопротивленія, а именно оно измѣняется пропорціонально квадрату скорости. Осборнъ Рейнольдсъ показалъ, что если всѣ обстоятельства опыта остаются неизмѣнными, за исключеніемъ величны скорости *), то такой переходъ одного закона сопротивленія къ другому происходитъ не постепенно, а сразу, т. е. имѣется нѣкоторая опредѣленная скорость, служащая какъ бы раздѣломъ двухъ явленій; при скоростяхъ меньшихъ ея—сопротивленіе пропорціонально первой степени, а для скоростей, превышающихъ раздѣльную, сопротивленіе измѣняется, какъ квадратъ скорости. Скорость, служащая раздѣломъ двухъ явленій, называется критической скоростью.

Осборнъ Рейнольдсъ, съ помощью очень остроумнаго опыта, выяснилъ причину такого рѣзкаго измѣненія характера явленія у критической скорости **). Вода истекала изъ резервуара A (фиг. 93) по трубѣ B; по оси трубы, у входа въ нее изъ пипетки C пускалась тонкая струйка окрашенной жидкости. При скоростяхъ меньшихъ критической эта струйка двигалась правильной тонкой осевой ниткой по всей длинѣ трубы, не смѣшиваясь съ водою. Но когда скорость была больше критической,

*) Т. е. не измѣняются ни діаметръ трубы, ни матеріалъ, изъ котораго она сдѣлана, а также испытываемая жидкость остается одна и та же.

*) См. въ собраніи мемуаровъ О. Рейнольдса. O. Reynolds. Papers on mechanical and physical subjects. V. II, p. 71.

то струя краски, сейчасъ же по входѣ въ трубу B, разбивалась, окрашивала всю воду, заполнявшую трубу, и вода казалась мутной. Чтобы лучше разобрать явленіе, Осборнъ Рейнольдсъ освѣщалъ свой приборъ рядомъ электрическихъ искръ; тогда можно было видѣть, что кажущееся помутнѣніе воды происходило отъ ряда вихрей, на которыя разбивалась струя краски (фиг. 94). Этимъ опытомъ было доказано, что пока скорость меньше критической, то вода движется въ трубѣ правильными продольными струями. При скоростяхъ большихъ критической—движеніе дѣлается вихревымъ. Появленіе этихъ вихрей и вызываетъ измѣненіе закона сопротивленія.



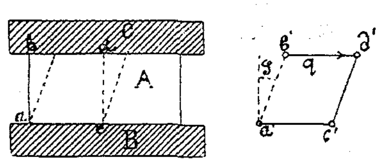
Фиг. 93.

Фиг. 94.

Надлежащее теоретическое изученіе вихреваго движенія жидкостей было начато Гельмгольцемъ, который между прочимъ доказалъ, что въ идеальной жидкости не могутъ образоваться вихри. Появленіе ихъ объясняется отступленіемъ свойствъ жидкости отъ идеальныхъ; оно указываетъ, что жидкость вязкая. Слѣдовательно въ разсматриваемомъ явленіи дѣйствуетъ сила вязкости жидкости. Достаточно разсматривать только эту силу; вѣсъ не имѣетъ значенія въ разбираемомъ явленіи.

Напомнимъ основные законы дѣйствія силы вязкости. Элементарное явленіе, въ которомъ проще всего проявляется вязкость, состоитъ въ сдвигѣ.

Пусть A (фиг. 95) представляетъ тонкій слой вязкой жидкости, заключающійся между двумя стеклами B и C. Нижнее стекло неподвижно, а верхнее приводится въ движеніе дѣйствіемъ силы q идущей горизонтально съ лѣво на право. Тогда прямоугольный элементъ жидкости *ab* cd получаетъ перекашиваніе и изъ прямоугольника превращается въ параллелограммъ; уголъ перекашиванія φ съ теченіемъ времени постепенно увеличивается. Сила q, необходимая для произведенія такого явленія, и есть сила вязкости. Она пропорціональна площади основанія перекашиваемой жидкой призмы Ω (т. е. плоскости прикосновенія между жидкостью и однимъ изъ стеколъ



Фиг. 95.

А или В) и кромѣ того пропорціональна скорости измѣненія угла перекашиванія φ, т. е. величинѣ

$$\frac{d\varphi}{dt}.$$

Слѣд. эта сила q опредѣляется формулою

$$q = A.\Omega.\frac{d\varphi}{dt},$$

гдѣ А—коеффиціентъ, различный для разныхъ жидкостей (коеффиціентъ вязкости).

Это описаніе силы вязкости показываетъ, что для подобныхъ системъ отношеніе силъ вязкости представится дробью

$$\frac{\alpha.\omega.}{\tau} = \frac{\alpha\lambda^2}{\tau},$$

гдѣ α—отношеніе коеффиціентовъ вязкости,

ω—отношеніе площадей, которое равно квадрату отношенія линейныхъ размѣровъ,

τ—по прежнему отношеніе соотвѣтственныхъ временъ *). Полученное выраженіе для отношенія силъ мы должны приравнять тому общему выраженію

$$\pi = \frac{\lambda.\mu}{\tau^2},$$

которое дается теоремой о подобіи. Здѣсь отношеніе μ подобныхъ массъ равно отношенію λ^3 ихъ объемовъ, умноженному на отношеніе плотностей (δ) двухъ жидкостей. И такъ окажется

$$\frac{\alpha.\lambda^2}{\tau} = \frac{\lambda.\delta.\lambda^3}{\tau^2}.$$

Откуда

$$\alpha = \delta.\lambda.\frac{\lambda}{\tau} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32).$$

Вмѣсто $\frac{\lambda}{\tau}$ вставимъ отношеніе скоростей движенія двухъ системъ (β) и тогда получаемъ:

$$\beta = \frac{\alpha}{\delta\lambda}$$

---

*) Понятно, что здѣсь не входитъ отношеніе угловъ φ для двухъ системъ, такъ какъ φ есть величина отвлеченная.

Такъ какъ β есть отношеніе сходственныхъ скоростей двухъ системъ, то оно будетъ представлять отношеніе критическихъ скоростей двухъ системъ. Оказывается, что такое отношеніе равно отношенію коеффиціентовъ вязкости, раздѣленному на произведеніе двухъ множителей: отношенія плотностей жидкостей и отношенія линейныхъ размѣровъ (напр., отношенія діаметровъ трубъ D). Поэтому критическая скорость для какой нибудь жидкости должна представляться формулой

$$V = k.\frac{A}{\Delta . D},$$

гдѣ A—коеффиціентъ вязкости этой жидкости,

Δ—ея плотность,

D—діаметръ трубы, по которой течетъ жидкость

k—постоянный коеффиціентъ, одинаковый для всѣхъ жидкостей.

Таковъ выводъ Осборнъ Рейнольдса, вполнѣ опредѣляющій величины критическихъ скоростей для различныхъ случаевъ.

Замѣтимъ, что критическая скорость тѣмъ меньше, чѣмъ больше діаметръ трубы. Во всѣхъ нашихъ водопроводахъ вода почти всегда течетъ со скоростью большею, чѣмъ критическая. Поэтому при расчетѣ водопроводовъ нужно считать что сопротивленіе движенію измѣняется пропорціонально квадрату скорости.

Чтобы видѣть примѣръ теченія водыпри скорости меньшей, чѣмъ критическая, нужно обратиться къ извѣстнымъ опытамъ Пуазейля; онъ употреблялъ капилярныя трубки, малаго діаметра, и потому даже замѣтныя скорости движенія не превосходили критическій предѣлъ.

97. *Движеніе подобныхъ паровыхъ машинъ.* Вѣсъ частей машины всегда хорошо уравновѣшенъ, т. е. центръ тяжести почти всѣхъ частей неподвиженъ. Поэтому тяжесть не слѣдуетъ считать въ числѣ силъ нашей системы. При хорошей смазкѣ можно также пренебречь силами тренія. Остается давленіе работающаго пара и полезное сопротивленіе. Пусть для двухъ подобныхъ машинъ примѣняется паръ различной упругости, и пусть α означаетъ соотвѣтствующее отношеніе. Тогда давленія пара въ двухъ машинахъ будутъ имѣть отношеніе

$$\alpha . \lambda^2.$$

Такое же отношеніе должно быть и между полезными сопротивленіями, преодолѣваемыми нашими машинами. Это выраженіе нужно приравнять величинѣ

$$\pi=\frac{\lambda\mu}{\tau^2},$$

т. е. тому отношенію силъ, которое даетъ теорема о подобіи.

А такъ какъ μ—отношеніе массъ—равно λ^3, то получимъ

$$\alpha\,.\,\lambda^2=\frac{\lambda\lambda^3}{\tau^2},$$

откуда

$$\alpha=\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2=\beta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33),$$

гдѣ β—означаетъ отношеніе линейныхъ скоростей двухъ машинъ.

Если $\alpha=1$, т. е. если въ обѣихъ машинахъ примѣняется паръ одинаковой упругости, то

$$\beta=1,$$

т. е. линейныя скорости обѣихъ машинъ будутъ одинаковы. На практикѣ такое соотношеніе часто соблюдается, или отступленія отъ него не велики.

Отношеніе чиселъ оборотовъ, дѣлаемыхъ машинами въ минуту, будетъ

$$\frac{1}{\lambda},$$

т. е. это число меньше для большей машины.

Числа паровыхъ лошадей для этихъ двухъ машинъ будутъ находиться въ отношеніи формулы (27):

$$K=\frac{\lambda^9\mu}{\tau^2};$$

а такъ какъ изъ (33) при $\beta=1$ имѣемъ

$$\lambda=\tau,$$

то

$$K=\frac{\mu}{\tau}=\frac{\lambda^3}{\lambda}=\lambda^2,$$

98. Но предположимъ, что мы желаемъ получить одинаковыя числа оборотовъ для обѣихъ машинъ—большой и малой. Слѣд. отношеніе τ соотвѣтственныхъ временъ равно единицѣ. Тогда изъ уравненія (33) получаемъ

$$\alpha=\lambda^2$$

т. е. въ большой машинѣ нужно примѣнять паръ, упругость котораго въ λ^2 разъ больше, чѣмъ упругость пара въ малой машинѣ. Такое соотношеніе никогда не примѣняется на практикѣ, такъ какъ потребуетъ громадныхъ давленій пара для крупныхъ машинъ.

99. *Теорема Аппеля.* Въ общемъ соотношеніи для силъ

$$\pi = \frac{\lambda\mu}{\tau^2},$$

установленномъ теоремой о подобіи, сдѣлаемъ слѣдующія частныя положенія:

$$\lambda = 1,\ \mu = 1,\ \pi = -1.$$

Тогда получимъ.

$$\tau^2 = -1,$$

слѣд.

$$\tau = \sqrt{-1} = i$$

Отношеніе скоростей $\beta = \frac{\lambda}{\tau}$ будетъ равно величинѣ

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1} = -i.$$

Условія $\lambda = 1$, $\mu = 1$ означаютъ, что въ обоихъ случаяхъ мы имѣемъ дѣло съ одной и той-же системой; а заданіе

$$\pi = -1$$

показываетъ, что силы сохранили свои величины, но измѣнили направленіе на прямо противуположное.

Полученный нами результатъ

$$\tau = i,\ \beta = -i$$

представляетъ собою слѣдующую теорему Аппеля:

Если въ уравненіяхъ любого движенія всѣ времена умножимъ на мнимый символъ i, а скорости на—i, то получимъ уравненія движенія для той же системы, но при обратномъ направленіи силъ [1]).

---

[1]) Эта теорема имѣетъ интересное приложеніе къ выводу мнимаго періода эллиптическихъ функцій. См. Greenhill. Les fonctions elliptiques. Аппель выводитъ свою теорему иначе, чѣмъ сдѣлано мною. Онъ пользуется для этого вывода Лагранжевыми уравненіями движенія, въ 1-й или во 2-й формѣ.

ВОСЬМАЯ БЕСѢДА.

Общія теоремы Динамики. Законъ движенія центра тяжести.

100. ***Законъ Движенія Центра Тяжести.*** Когда система состоитъ изъ большого числа частей, то полное изученіе ея движенія можетъ оказаться очень сложнымъ и даже невыполнимымъ. Въ такихъ случаяхъ полезно, ранѣе подробнаго изслѣдованія движенія частей системы, получить нѣкоторое понятіе объ общемъ движеніи всей системы въ совокупности. Для этой цѣли имѣетъ особое значеніе опредѣленіе движенія центра тяжести, т. е. центра массъ, составляющихъ систему. Движеніе этой замѣчательной точки подчинено простому и общему для всѣхъ случаевъ закону, который мы и разсмотримъ.

Воспользуемся здѣсь пріемомъ, который мы уже неоднократно примѣняли. Разобьемъ систему на отдѣльныя матеріальныя точки и всѣ связи замѣнимъ нѣкоторыми силами. Возможность такой замѣны легко себѣ изъяснить; всякая связь измѣняетъ движеніе точки, къ которой она приложена, другими словами, производитъ нѣкоторое ускореніе. Слѣд. каждая связь производитъ такое же дѣйствіе, какъ сила, а потому всѣ связи мысленно могутъ быть замѣнены силами. Конечно, если мы не ограничиваемся такой замѣной въ принципѣ, а пожелаемъ въ подробности найти направленіе и величину силы, замѣняющей связь, то во многихъ случаяхъ встрѣтимъ затрудненія. Поэтому то мы постоянно стараемся исключить силы связи.

101. ***Внутреннія и внѣшнія силы.*** Пусть всѣ связи замѣнены мысленно силами; тогда очень важно различеніе силъ внѣшнихъ отъ силъ внутреннихъ. Внутренними силами мы называемъ тѣ, которыя происходятъ отъ дѣйствія одной части системы на другую часть той же системы. Внѣшнія же силы

представляютъ дѣйствіе на нашу систему другихъ тѣлъ, не входящихъ въ составъ системы.

Всѣ силы вообще происходятъ отъ дѣйствія одних тѣлъ на другія. Поэтому различеніе внутреннихъ силъ отъ внѣшнихъ опредѣляется только тѣмъ, какія тѣла мы считаемъ входящими въ составъ нашей системы. Измѣняя заданіе состава системы, мы получимъ, что нѣкоторыя силы, бывшія прежде внѣшними, сдѣлаются внутренними и обратно. Напр. если разсматриваемъ движеніе системы, состоящей изъ Юпитера съ его спутниками, тогда притяженія между этими тѣлами представляютъ внутреннія силы; дѣйствія солнца и другихъ планетъ на Юпитера и спутниковъ его будутъ внѣшними силами для этой системы. Но измѣнимъ составъ системы; переходимъ къ разсмотрѣнію всей нашей планетной системы въ совокупности; тогда всѣ дѣйствія между планетами и спутниками оказываются внутренними силами.

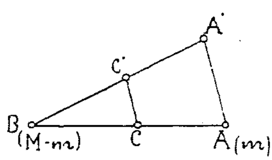
Или вообразимъ себѣ паровозъ; если разсматриваемъ движеніе поршня, то давленіе пара на него есть сила внѣшняя. Но когда разсматриваемъ весь паровозъ въ цѣломъ, то давленіе пара вездѣ въ паровозѣ представляетъ внутреннюю силу для этой системы.

102. Такимъ образомъ между внутренними и внѣшними силами нѣтъ разницы по существу. Тѣмъ не менѣе весьма важно отдѣлять внутреннія силы отъ внѣшнихъ и вотъ почему: внутреннія силы, какъ представляющія взаимныя дѣйствія частей системы одной на другую, всегда имѣются въ системѣ по двѣ вмѣстѣ, равныя и противоположныя. Этотъ результатъ указывается намъ третьимъ закономъ Ньютона—закономъ равенства между дѣйствіемъ и противудѣйствіемъ. Поэтому если A и B двѣ части системы, то мы получимъ въ ней: во-первыхъ, дѣйствіе A на B, а во-вторыхъ, обратное дѣйствіе B на A. Въ системѣ, состоящей изъ Юпитера со спутниками, мы встрѣтимъ какъ притяженіе Юпитера на одного изъ спутниковъ, такъ и обратное притяженіе спутника на Юпитера. Въ паровозѣ, когда разсматриваемъ его въ цѣломъ, имѣемъ давленіе ползуна на параллели и обратное давленіе параллелей на ползунъ и т. д.

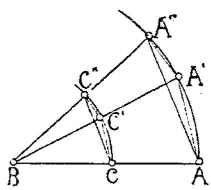
Третій законъ Ньютона служитъ главнымъ орудіемъ для исключенія внутреннихъ силъ. Мы можемъ не знать ни величинъ ни направленій этихъ силъ; зная только, что онѣ равны между собою и противуположны, мы часто можемъ достигнуть того, что въ уравненіяхъ эти двѣ силы сокращаютъ одна другую.

103. *Доказательство Закона движенія центра тяжести.* Переходимъ теперь къ выводу общаго закона движенія центра массъ. Въ слѣдующемъ доказательствѣ мы будемъ подражать Ньютону и Даламберу.

Разсмотримъ, какъ перемѣщается общій центръ нѣсколькихъ массъ вслѣдствіе перемѣщенія одной изъ этихъ массъ. Выберемъ, напр., одну изъ матеріальныхъ частицъ нашей системы m, находящуюся въ точкѣ A (фиг. 96); пусть она перемѣщается, а всѣ прочія части системы неподвижны. Если полная масса системы M, то, выключая подвижную массу m, получимъ неподвижный остатокъ, имѣющій массу M—m; пусть центръ тяжести этого остатка есть точка B. Отмѣтимъ точкой C поло-



Фиг. 96.



Фиг. 97.

женіе общаго центра всей массы M; по опредѣленію понятія: центръ тяжести, или центръ массъ, имѣемъ, что точка C лежитъ на прямой AB и дѣлитъ разстояніе AB на части обратно пропорціональныя массамъ, сосредоточеннымъ въ A и въ B, т. е.

$$\frac{BC}{BA}=\frac{m}{M-m};$$

отсюда

$$\frac{BC}{BA+BC}=\frac{m}{M-m+m},$$

т. е.

$$\frac{BC}{BA}=\frac{m}{M} \quad . \quad . \quad . (34).$$

Эта пропорція опредѣляетъ положеніе общаго центра C по даннымъ A и B.

Если точка A затѣмъ перемѣстится въ A′, а B остается на мѣстѣ, то новое положеніе общаго центра тяжести будетъ точка C′, лежащая на прямой BA′ и дѣлящая BA′ въ томъ же отношеніи, какъ по условію (34), т. е.

$$\frac{BC'}{BA'}=\frac{m}{M}.$$

Отсюда заключаемъ, что треугольники BCC' и BAA' подобны, т. е. CC' параллельна AA' и величины CC', AA' будутъ въ томъ же самомъ отношенiи, какъ (34), т. е.

$$\frac{CC',}{AA',}=\frac{m}{M}.$$

Итакъ: если перемѣщается только одна масса m, а прочiя массы остаются въ покоѣ, то перемѣщенiе общаго центра тяжести параллельно перемѣщенiю массы m и меньше его въ отношенiи

$$\frac{m}{M}.$$

Это условiе справедливо какъ для конечныхъ перемѣщенiй, такъ и для безконечно малыхъ. Отсюда получаемъ такiя слѣдствiя:

a) Если масса m описываетъ кривую $AA'A''$...(фиг. 97), то центръ C опишетъ кривую $CC'C''$..., владѣющую тѣмъ свойствомъ, что всѣ хорды ея

$$CC',\ CC'',\ C'C''...$$

параллельны и пропорцiональны соотвѣтствующимъ хордамъ пути точки A:

$$AA',\ AA'',\ A'A''....$$

Слѣдовательно центръ C описываетъ кривую, которая подобна пути точки A и подобнымъ образомъ расположена. Центромъ подобiя служитъ точка B.

b) Скорости центра массъ и отдѣльной массы m въ соотвѣтствующихъ положенiяхъ параллельны одна другой, и между величинами ихъ существуетъ то же отношенiе

$$\frac{m}{M},$$

какъ и между перемѣщенiями.

Дѣйствительно, по опредѣленiю понятiя о скорости имѣемъ напр. для скорости въ точкѣ A: направленiе ея есть предѣлъ направленiя хорды AA', получающiйся когда точка A' постепенно приближается къ A; величина же скорости въ точкѣ A есть предѣлъ дроби, получающейся отъ дѣленiя хорды AA' на время, потребное для прохожденiя пути AA'. Подобнымъ же образомъ найдемъ и скорость центра массъ для положенiя его въ C, замѣнивши только въ предыдущемъ описанiи хорду AA' хордой CC'. Но такъ какъ точка C копируетъ движенiе точки A, только уменьшивши ихъ въ отношенiи

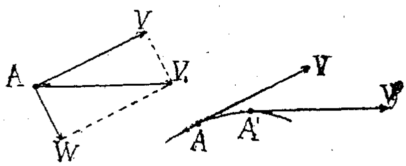
$$\frac{m}{M},$$

то несомнѣнно скорость центра массъ въ точкѣ C окажется параллельной скорости массы m въ точкѣ A и уменьшенной въ томъ же отношеніи.

c) Ускоренія движенія общаго центра массъ и отдѣльной массы m для соотвѣтствующихъ положеній будутъ параллельны одно другому и между ихъ величинами будетъ отношеніе

$$\frac{m}{M}.$$

Дѣйствительно обратимся къ опредѣленію ускоренія: пусть (фиг. 98) линія AV изображаетъ направленіе и величину скорости массы m для положенія A; и пусть $A'V'$ означаетъ направленіе и величину скорости для положенія A', безконечно близкаго къ A. Построивъ параллелограммъ AVV_1W котораго AV, AV_1 равны и параллельны скоростямъ массы m въ точкахъ A, A', получаемъ векторъ AW, называемый измѣненіемъ скорости; будемъ постепенно приближать точку A' къ A, тогда



Фиг. 98.

предѣлъ направленія AW называется направленіемъ ускоренія. Величина же ускоренія есть предѣлъ отношенія AW ко времени прохожденія пути AA'. Подобное же описаніе относится къ ускоренію центра массъ C, а такъ эта точка копируетъ скорости точки A, уменьшивши ихъ въ отношеніи

$$\frac{m}{M},$$

то, разумѣется, ускореніе центра массъ будетъ параллельно ускоренію массы m и меньше его въ томъ же самомъ отношеніи.

Имѣя ускореніе матеріальной точки m, сейчасъ получимъ силу, движущую эту точку, т. е. равнодѣйствующую всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ массѣ m. Сила будетъ идти параллельно ускоренію a и равняться произведенію ускоренія на массу, т. е. сила будетъ

$$p = m.a.$$

Если бы эта сила была дана, то мы сейчасъ нашли бы всѣ обстоятельства движенія матеріальной точки m.

Что касается центра массъ, то эта точка фиктивная, воображаемая, несвязанная въ дѣйствительности съ какой нибудь матеріальной массой; это геометрическая, а не матеріальная точка. Но мы можемъ условно вообразить себѣ матеріальную точку, у которой масса равна массѣ M всей нашей систетьы и которая движется такъ, какъ нашъ центръ массъ. Будемъ разбирать условія движенія такой матеріальной точки. Подобное условное разсмотрѣніе называется сосредоточеніемъ массы всей системы въ ея центрѣ тяжести. Сдѣлавъ такое сосредоточеніе, опредѣлимъ, какую силу нужно приложить къ этой воображаемой матеріальной точкѣ, чтобы вызвать то движеніе, которое нашъ разборъ указалъ для центра массъ?

Искомая сила P должна быть параллельна ускоренію центра массъ, слѣд. параллельна ускоренію массы m, а также и силѣ, приложенной къ m. Далѣе величина силы P получится, умножая массу M на ускореніе ея, которое меньше ускоренія a точки m, въ отношеніи

$$\frac{m}{M}.$$

Такимъ образомъ получимъ

$$P = M.a.\frac{m}{M} = ma,$$

т. е.

$$P = p.$$

Итакъ получаемъ слѣдующее заключеніе относительно силъ:

Чтобы сообщить центру массъ, въ которомъ считаемъ сосредоточенной всю массу системы, то движеніе, которое онъ имѣетъ въ дѣйствительности, мы должны приложить къ нему силу, параллельную и равную той силѣ p, которая дѣйствуетъ на матеріальную точку m. Другими словами:

Центръ массъ движется какъ матеріальная точка, въ которой сосредоточена масса всей системы и къ которой приложена сила, дѣйствующая на массу m.

Это правило представляетъ отвѣтъ на поставленный нами вопросъ: какъ перемѣщается центръ всѣхъ массъ вслѣдствіе перемѣщенія одной изъ нихъ?

104. Мы считали, что перемѣщается только масса m, а прочія массы остаются въ покоѣ. То, что сдѣлано для массы m, можно повторить и для каждой изъ всѣхъ массъ, составляющихъ систему; можно перебрать ихъ одну за другой, m, m′, m″...и для каждой въ отдѣльности опредѣлить, какое движеніе получаетъ центръ массъ вслѣдствіе движенія одной отдѣльной массы. Каждый разъ придется искать движеніе матеріальной точки

массы M подъ дѣйствіемъ той силы, которая приложена къ массѣ m' или m'' или m''' и т. д.

Но предположимъ теперь, что наши массы m, m', m''...движутся не по одиночкѣ, а всѣ сразу. Какое при этомъ получится движеніе центра массъ?

Очевидно, оно получится какъ результатъ геометрическаго сложенія тѣхъ его движеній, которое центръ получалъ при частныхъ движеніяхъ массъ m, m', m''...по одиночкѣ. Т. е. нужно сложить (геометрически) тѣ частныя движенія, которая получаетъ масса M, подъ вліяніемъ силъ, приложенныхъ къ массамъ m, m'... Но вспомнимъ законъ независимости совокупнаго дѣйствія силъ (второй законъ Ньютона); этотъ законъ устанавливаетъ, что результатъ геометрическаго сложенія такихъ движеній, производимыхъ отдѣльными силами, тождественъ съ движеніемъ, которое вызовется, если на ту же массу будетъ дѣйствовать одновременно, сразу, вся совокупность этихъ силъ. Итакъ оказывается, что движеніе центра массъ, получающееся, когда сразу движутся всѣ отдѣльныя матеріальныя точки, составляющія систему, можетъ быть описано въ формѣ слѣдующей теоремы:

Центръ массъ движется какъ матеріальная точка, которая имѣетъ массу, равную массѣ всей системы, и къ которой приложены всѣ силы, дѣйствующія на отдѣльныя части системы.

Но если мы перенесемъ въ одну точку внѣшнія и внутреннія силы, дѣйствующія въ системѣ, то внутреннія силы окажутся всегда по двѣ равныя и противуположныя; слѣд. онѣ взаимно уничтожатся. Останутся только внѣшнія силы системы. И такъ въ вышеприведенной теоремѣ можно прямо вмѣсто словъ всѣ силы вставить: всѣ внѣшнія силы.

Изложенная теорема и представляетъ общій законъ движенія центра массъ. Онъ былъ найденъ Даламберомъ и изложенъ въ Traité de Dynamique—сочиненіи, въ которомъ первый разъ была построена Динамика системы *).

105. Слѣдуетъ обратить особое вниманіе на то, что движеніе центра массъ вполнѣ опредѣляется внѣшними силами и что вся совокупность внутреннихъ силъ не оказываетъ никакого вліянія на это движеніе.

Возьмемъ частный случай: пусть на систему вовсе не дѣй-

*) Нѣмецкій переводъ въ Ostwald's Klassiker №106.

ствуютъ внѣшнія силы, и она предоставлена исключительно своимъ внутреннимъ силамъ. Это будетъ система замкнутая, изолированная отъ всякихъ внѣшнихъ вліяній; но внутри ея могутъ дѣйствовать многочисленныя и разнообразныя внутреннія взаимодѣйствія. Общій законъ движенія центра массъ показываетъ, что въ такихъ случаяхъ этотъ центръ будетъ двигаться какъ матеріальная точка, на которую вовсе не дѣйствуютъ силы. Такая точка будетъ или покоиться или двигаться по инерціи, т. е. прямолинейно и равномѣрно. И такъ

Центръ массъ изолированной системы или находится въ покоѣ, или движется прямолинейно и равномѣрно.

Этотъ частный случай общей теоремы былъ найденъ еще Ньютономъ и изложенъ въ началѣ его Principia *).

106. ***Разложеніе движенія на три прямолинейныхъ движенія по тремъ координатнымъ осямъ.*** Можно было бы разсматривать движеніе центра массъ съ примѣненіемъ этого пріема разложенія, который такъ часто употребляется въ Механикѣ со временъ Маклорена. Нужно разложить на эти три оси какъ движеніе каждой отдѣльной массы, такъ и движеніе центра массъ. Также и силы должны быть замѣнены своими составляющими по координатнымъ осямъ. Затѣмъ слѣдуетъ разсматривать движеніе по каждой изъ осей отдѣльно. Получимъ прежній результатъ относительно движенія центра массъ, но повторенный для каждой изъ трехъ осей.

Такое разсмотрѣніе движенія центра массъ по каждой изъ осей координатъ отдѣльно иногда приноситъ пользу. Можетъ случиться, напр., что хотя внѣшнія силы существуютъ, но сумма проекцій ихъ на одну изъ осей (напр., на ось X) равна нулю. Тогда для этой оси будетъ имѣть мѣсто Ньютоновъ результатъ, т. е. движеніе центра тяжести по оси X будетъ равномѣрное.

107. ***Примѣненіе пріемовъ дифференціальнаго исчисленія.*** Мы съ намѣреніемъ вели выводы элементарно, чтобы сущность закона лучше выяснилась. Примѣняя символы и методы дифференціальнаго исчисленія, можно значительно ускорить выводъ. Разсмотримъ только движеніе по оси X; сказанное о ней примѣняется и къ двумъ другимъ осямъ. Уравненіе движенія одной изъ матеріальныхъ точекъ, составляющихъ систему, будетъ:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1.$$

*) См. нѣмецкій переводъ Вольферса, стр. 37. Zusatz 4.

Здѣсь: m—масса точки

x—ея координата

$\frac{d^2x}{dt^2}$ — ускореніе по оси X

X — проекція внѣшней силы

X_1 „ внутренней силы.

Составимъ такія же уравненія для всѣхъ точекъ системы, и затѣмъ сложимъ эти уравненія. Обозначая сложеніе знакомъ Σ, найдемъ:

$$\Sigma.m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X+\Sigma X_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (35).$$

Но здѣсь

$$\Sigma X_1=0,$$

такъ какъ внутреннія силы взаимно сокращаются.

Назовемъ координату центра всѣхъ массъ черезъ ξ, а сумму всѣхъ массъ черезъ M. По опредѣленію понятія „центръ массъ"—имѣемъ:

$$M.\xi=\Sigma mx.$$

Дифференцируя же это уравненіе два раза находимъ;

$$M.\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Sigma m.\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Подставляя это выраженіе въ (35), получимъ:

$$M.\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Sigma X.$$

А это уравненіе и выражаетъ символами законъ:

Центръ массъ движется какъ матеріальная точка массы M, къ которой приложены всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на отдѣльныя точки системы.

108. *Приложенія закона движенія центра массъ.* Законъ этотъ не даетъ интеграла уравненій движенія, а представляетъ только очень простую картину движенія; во многихъ случаяхъ такая картина даетъ важныя указанія на свойства движенія.

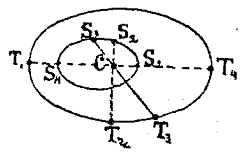
Вообще первое, что нужно получить при изученіи движенія системы, есть движеніе ея центра тяжести; затѣмъ идетъ вторая задача—движеніе частей системы около ея центра тяжести. Нашъ законъ даетъ для первой задачи самое простое рѣшеніе.

109. *Примѣры.* A) Возьмемъ систему, состоящую изъ земли и падающаго тяжелаго тѣла. Паденіе тѣла есть результатъ дѣйствія внутреннихъ силъ системы, но дѣйствіемъ этихъ силъ положеніе центра тяжести не можетъ быть измѣнено. Слѣд. если тяжелое тѣло перемѣстится по направленію къ землѣ на длину S, то въ то же время земля должна перемѣститься по направленію къ падающему тѣлу на длину s, которая удовлетворяетъ условію

$$\frac{s}{S}=\frac{m}{M}$$

(m—масса тѣла, M—масса земли).

B) Разсмотримъ систему, состоящую изъ солнца и земли, и оставимъ въ сторонѣ всѣ внѣшнія притяженія, дѣйствующія на эту систему. Разберемъ только дѣйствіе взаимнаго притяженія между солнцемъ и землей; это взаимодѣйствіе не должно измѣнять положеніе центра тяжести системы. Поэтому и солнце S и земля T (фиг. 99) описываютъ эллипсы около общаго центра тяжести этой системы C, какъ фокуса; соотвѣтствующія ихъ положенія отмѣчены на фигурѣ одинаковыми цифрами.



Фиг. 99.

Такъ какъ масса солнца значительно больше массы земли (около 390.000 разъ), то общій центръ тяжести C будетъ расположенъ очень близко къ центру солнца, и эллипсъ, описываемый солнцемъ, очень малъ по сравненію съ орбитою земли.

C) Возьмемъ всю нашу планетную систему въ совокупности; ее можно считать изолированной, такъ какъ можно пренебречь вліяніемъ неподвижныхъ звѣздъ. Отсюда заключаемъ, что общій центръ тяжести планетной системы долженъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.

D) При ударахъ между тѣлами, составляющими систему, возбуждаются внутреннія силы. Слѣд. эти удары не измѣняютъ движеніе центра тяжести системы. То же заключеніе относится и къ взрывамъ, происходящимъ въ тѣлахъ, составляющихъ систему. Напр. при взрывѣ бомбы осколки ея разлетаются во всѣ стороны, но ихъ общій центръ тяжести продолжаетъ прежнее движеніе.

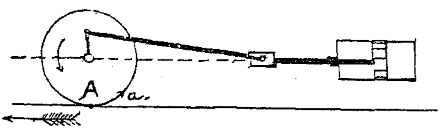
E) Представимъ себѣ человѣка, стоящаго на совершенно гладкой горизонтальной плоскости; пусть совершенно отсутствуетъ треніе между этой плоскостью и подошвами ногъ. Тогда человѣкъ представляетъ систему, на которую дѣйствуютъ только вертикальныя внѣшнія силы. Поэтому возможно только вертикальное перемѣщеніе его центра тяжести; человѣкъ можетъ подпрыгивать;—для этого нужно вызвать усиленное давленіе ногъ на горизонтальную плоскость, т. е. давленіе, превышающее вѣсъ тѣла. Но движеніе по горизонтальному направленію окажется невозможнымъ, за отсутствіемъ внѣшнихъ силъ по этому направленію; внутреннія же силы не могутъ перемѣстить центръ тяжести тѣла. Какъ только намъ удается вынести впередъ одну ногу, сейчасъ же другая нога отодвинется назадъ, и центръ тяжести не перемѣстится. Каждый замѣчалъ это явленіе на гладкомъ льду.

Вообще перемѣщеніе человѣка по горизонтальной плоскости возможно только вслѣдствіе тренія между этой плоскостью и подошвами ногъ; когда человѣкъ выноситъ впередъ правую ногу, то лѣвая стремится подвинуться назадъ, но этому мѣшаетъ треніе плоскости о подошву лѣвой ноги; послѣдняя остается на мѣстѣ. Это треніе, мѣшающее скольженію лѣвой ноги назадъ, есть внѣшняя сила, направленная въ сторону движенія центра тяжести тѣла человѣка; существованіе этой силы и дѣлаетъ возможнымъ перемѣщеніе центра тяжести, т. е. ходьбу.

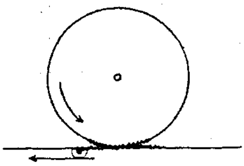
110. Разсмотримъ еще **паровозъ** и разберемъ условія его движенія по горизонтальному направленію. Для этого необходима **внѣшняя** сила, тоже горизонтальная и направленная въ сторону движенія. Откуда она получается?

Давленіе пара представляетъ внутреннюю силу, и не можетъ сообщить движеніе центру тяжести. Это подтверждается опытомъ, который неоднократно дѣлали съ паровозами; паровозъ подвѣшивается на цѣпяхъ, и, растопивъ котелъ, пускаютъ машину въ ходъ. Оказывается, что вслѣдствіе хода поршня взадъ и впередъ получаются лишь небольшія качанія всей остальной массы въ обратномъ направленіи, а центръ тяжести остается неподвижнымъ.

Когда паровозъ поставленъ на рельсы и машина его пущена въ ходъ, то между его ведущими колесами и рельсами возбуждается треніе, которое и есть горизонтальная сила, необходимая для движенія паровоза съ поѣздомъ. Подробности явленія состоятъ въ слѣдующемъ (фиг. 100): при вращеніи колеса, стоящаго на рельсѣ, точка A стремится скользить по рельсу по направленію стрѣлки *a*, но этому мѣшаетъ треніе между колесомъ и рельсомъ; направленіе этого тренія показано большой стрѣлкой. Колесо своими неровностями и шероховатостями упирается въ рельсъ и испытываетъ отъ рельса обратное давленіе. Эти шероховатости колеса и рельса представляютъ какъ бы миніатюрные зубцы (фиг. 101), между которыми происходитъ



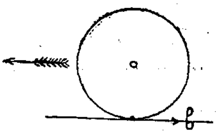
Фиг. 100.



Фиг. 101.

упоръ, и получается давленіе. Вотъ это обратное давленіе, т. е. треніе, передающееся отъ рельса на колесо, и есть та внѣшняя сила, которая перемѣщаетъ центръ тяжести паровоза. Она должна преодолѣть сопротивленіе поѣзда, припряженнаго къ паровозу, т. е. должна быть больше его. Поэтому для перемѣщенія поѣзда требуется значительное треніе между ведущими колесами и рельсомъ; а треніе пропорціально давленію, слѣд. необходимо, чтобы ведущія колеса производили значительное давленіе на рельсъ. Другими словами, для того, чтобы вести тяжелый поѣздъ, требуется тяжелый паровозъ.

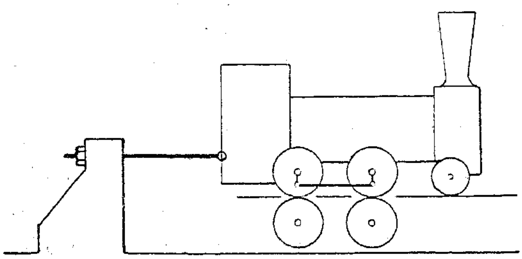
Все это относится только къ **ведущимъ** колесамъ паровоза, т. е. къ тѣмъ, на которыя дѣйствуетъ поршень паровой машины, вращающій ихъ; та часть вѣса паровоза, которая передается на эти колеса, есть полезный грузъ; чѣмъ онъ больше, тѣмъ сильнѣе паровозъ, т. е. тѣмъ болѣе тяжелый поѣздъ онъ можетъ вести. Иногда въ паровозѣ есть **поддерживающія** колеса, т. е. не соединенныя съ паровой машиной. Часть вѣса паровоза, передающаяся на эти колеса, не приноситъ никакой пользы, т. е. не увеличиваетъ силу тяги паровоза. Эти колеса не даютъ движущей силы, а напротивъ того сами приводятся въ движеніе такъ же, какъ колеса вагоновъ. Когда поѣздъ идетъ по направленію большой стрѣлки (фиг. 102), то треніе рельсовъ о колеса (b) вращаетъ ихъ. Это треніе на вагонныхъ колесахъ, или на поддерживающихъ колесахъ паровоза, идетъ въ сторону, противуположную движенію; оно представляетъ внѣшнюю силу, сопротивляющуюся движенію центра тяжести.



Фиг. 102.

Итакъ движущая сила паровоза представляется треніемъ его ведущихъ колесъ о рельсы. Мы увеличиваемъ эту силу тѣмъ, что увеличиваемъ вѣсъ паровоза. Если такое средство недостаточно, то можно прибѣгнуть къ другому, на которое можно смотрѣть, какъ на увеличеніе тренія. Рельсъ дѣлаютъ зубчатымъ и съ нимъ сцѣпляется стальное зубчатое колесо, сидящее на оси паровоза. Т. е. вмѣсто миніатюрныхъ зубцовъ, происходящихъ вслѣдствіе шероховатости колеса и рельса, ставятъ крупные желѣзные и стальные зубья. Такое устройство примѣняютъ въ горныхъ паровозахъ, которые должны подниматься по крутымъ уклонамъ.

111. Обратно, всякое уменьшеніе тренія сейчасъ же уменьшаетъ силу тяги паровоза; это случается напр. при обледенѣніи рельсовъ. Сила тяги паровоза также обратилась бы въ нуль, если бы мы его поставили не на рельсы, а на катки, свободно вращающіеся на своихъ осяхъ (фиг. 103).



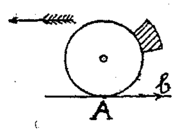
Фиг. 103.

Въ прежнее время, когда еще не былъ изобрѣтенъ инжекторъ и питаніе котла водою производилось насосомъ, приводимымъ въ дѣйствіе машиной паровоза, на станціяхъ имѣлись подобные катки; паровозъ останавливали на нихъ, чтобы можно было питать его водою, при стояніи поѣзда.

Теперь установка паровоза на каткахъ примѣняется въ лабораторіяхъ при испытаніи паровозовъ. На катки ставятъ ведущія колеса, а самъ паровозъ удерживается на мѣстѣ болтомъ, соединеннымъ съ неподвижной опорой. Натянутость этого болта можетъ быть измѣрена особымъ динамометромъ. Оси катковъ снабжаются сильными тормазами, помощію которыхъ можно измѣнять сопротивленіе катковъ вращенію; эти тормазы снабжены приборомъ для измѣренія работы тренія.

Такимъ образомъ получается искусственное сопротивленіе, замѣняющее сопротивленіе поѣзда движенію. Сила тяги паровоза измѣряется динамометромъ, указывающимъ напряженіе того болта, который удерживаетъ паровозъ. При увеличеніи тренія на осяхъ катковъ сила тяги паровоза растетъ, и мы получимъ наглядное подтвержденіе того, что выше было сказано о значеніи тренія между рельсами и ведущими колесами паровоза, какъ внѣшней движущей силы.

112. *Торможеніе поѣздовъ.* Торможеніе состоитъ въ томъ, что тормазныя колодки съ силою нажимаются на бандажи колесъ, чѣмъ вызываютъ значительное треніе между нажатыми поверхностями. Но какъ это нажатіе, такъ и треніе, имъ вызываемое, представляютъ для поѣзда внутреннія силы, и одно появленіе ихъ не объясняетъ остановку поѣзда, если на это явленіе смотрѣть съ точки зрѣнія закона движенія центра тяжести. Чтобы уменьшить скорость движенія всего поѣзда, т. е. скорость его центра тяжести, необходимы внѣшнія силы, которыя должны быть горизонтальны и направлены противуположно движенію поѣзда. Такія силы непремѣнно должны появиться при торможеніи. Какъ силы внѣшнія, онѣ могутъ получиться только тамъ, гдѣ къ поѣзду прикасаются внѣшніе предметы, т. е. это могутъ быть или сопротивленіе воздуха или дѣйствія рельсовъ на колеса. Но торможеніе не вліяетъ само по себѣ на сопротивленіе воздуха, слѣд. необходимо заключить, что торможеніе вызываетъ, въ точкѣ прикосновенія заторможеннаго колеса съ рельсомъ, треніе b (фиг. 104), которое и есть разыскиваемая нами внѣшняя сила, останавливающая поѣздъ. Чѣмъ эта сила больше, тѣмъ скорѣе остановится поѣздъ.



Фиг. 104.

113. *Быстрая остановка поѣзда* въ нѣкоторыхъ случаяхъ очень нужна, такъ какъ этимъ можно предотвратить большія несчастія. Поэтому важно указать условія наиболѣе энергичнаго торможенія, при которыхъ получается наибольшая величина тренія b. Это было сдѣлано профессоромъ Н. П. Петровымъ *). и вотъ главный результатъ его изслѣдованія.

Прежде всего посмотримъ, имѣется ли въ нашемъ распоряженіи средство измѣнять силу тренія b? Здѣсь происходитъ треніе между твердыми тѣлами; оно пропорціонально давленію— но мы не можемъ измѣнять давленіе между колесомъ и рельсомъ. Остается воспользоваться зависимостью такого тренія отъ скорости движенія. Въ прежнее время думали, что треніе не зависитъ отъ этой скорости; таковъ былъ результатъ опытовъ Морена. Но такой результатъ получился только потому, что въ опытахъ Морена скорости были невелики и измѣнялись въ не-

*) См. его статью „О непрерывныхъ тормазныхъ системахъ въ Извѣстіяхъ С.-Петербургскаго Техническаго Института 1878 г.

большихъ предѣлахъ. При тѣхъ скоростяхъ, съ которыми имѣемъ дѣло при движеніи поѣздовъ, треніе твердыхъ тѣлъ несомнѣнно зависитъ отъ **скорости**; оно замѣтно уменьшается съ увеличеніемъ скорости, съ которой одно изъ трущихся тѣлъ скользитъ по другому. Это было найдено еще въ половинѣ прошлаго столѣтія инженерами Боше́ и Пуаре́, которые производили опыты съ желѣзнодорожными поѣздами. Затѣмъ этотъ выводъ былъ многократно подтверждаемъ экспериментально *). Уменьшеніе тренія съ увеличеніемъ скорости довольно значительное; напр. при скоростяхъ около 20 километровъ въ часъ коеффиціентъ тренія равенъ 0,2, а при скорости 80 километровъ въ часъ этотъ коеффиціентъ падаетъ до 0,136.

Скорости, о которыхъ здѣсь говорится, суть скорости относительнаго скольженія двухъ трущихся поверхностей—рельса и колеса. Если колесо заторможено такъ сильно, что вовсе не можетъ вращаться, то скорость скольженія равна скорости поступательнаго движенія поѣзда. Уменьшивъ надавливаніе тормозныхъ колодокъ на колесо, можемъ достигнуть того что колесо будетъ отчасти вращаться, и тогда скорость скольженія меньше, чѣмъ въ предъидущемъ случаѣ. Можно тѣмъ же способомъ, т. е. измѣненіемъ надавливанія колодокъ, даже достигнуть такого вращенія колесъ, при которомъ вовсе нѣтъ скольженія колеса по рельсу, а колесо только катится. Въ этомъ случаѣ скорость скольженія равна нулю; но треніе увеличивается съ уменьшеніемъ скорости; слѣд. это будетъ случай, когда треніе наибольшее. При такихъ условіяхъ тормаза дѣйствуютъ наиболѣе энергично, и остановка поѣзда произойдетъ въ возможно кратчайшее время.

И такъ теоретическій разборъ приводитъ къ слѣдующему правилу: для наиболѣе быстрой остановки поѣзда нужно тормозить колеса такими силами, которыя не вызывали бы скольженія колесъ по рельсамъ, и были бы настолько велики, чтобы малѣйшее увеличеніе ихъ вызывало уже скользящее движеніе колесъ по рельсамъ **).

Къ такому же правилу пришли и техники чисто практическимъ путемъ.

---

*) Одна изъ главныхъ работъ по этому вопросу принадлежитъ Дугласъ Гальтону, который производилъ опыты на англійскихъ желѣзныхъ дорогахъ.

**) Стр. 301 указанной выше статьи Н. П. Петрова.

ДЕВЯТАЯ БЕСѢДА.

Общіе законы Динамики. Законъ количествъ движенія.

113. *Примѣненіе принципа отвердѣнія въ Динамикѣ.* Такъ какъ законы и уравненія Динамики получаются изъ законовъ и уравненій Статики, со введеніемъ въ нихъ силъ инерціи, то мы можемъ и въ Динамикѣ примѣнять принципъ отвердѣнія, которымъ часто пользуются въ Статикѣ. Условія примѣненія въ обоихъ случаяхъ одинаковы: система не должна имѣть внѣшнихъ связей, соединяющихъ ее съ тѣлами, не входящими въ составъ системы; или если такія связи существуютъ, то ихъ нужно уничтожить и замѣнить силами и такимъ образомъ освободить систему. Тогда для нея оказываются возможными такія же перемѣщенія, какъ для твердаго тѣла, а слѣд. можно примѣнять условія равновѣсія твердаго тѣла.

Итакъ, освободивъ систему и прибавивъ къ внѣшнимъ силамъ еще и силы инерціи, мы можемъ для любой системы примѣнять уравненія равновѣсія твердаго тѣла. Этимъ путемъ получимъ общія теоремы, справедливыя для произвольной системы; это будутъ общіе законы Динамики системы.

115. Условія равновѣсія твердаго тѣла представляются шестью уравненіями, выполненіе которыхъ необходимо и достаточно для равновѣсія; суммы проекцій внѣшнихъ силъ на три координатныя оси должны быть равны нулю, и суммы моментовъ силъ, относительно трехъ координатныхъ осей, тоже должны быть равны нулю. Соотвѣтственно этому, получимъ въ Динамикѣ шесть уравненій: первыя три будутъ выражать, что суммы проекцій внѣшнихъ силъ и силъ инерціи равны нулю; остальныя три устанавливаютъ, что суммы моментовъ внѣшнихъ силъ и силъ инерціи тоже равны нулю. Внутреннія силы, т. е. связи системы, не входятъ ни въ одно изъ этихъ уравненій,

такъ какъ исключаются уже во время самаго составленія уравненій.

Разборъ первыхъ трехъ изъ этихъ уравненій дастъ законъ количествъ движенія; а разбирая остальныя три уравненія, можно получить законъ моментовъ количествъ движенія.

116. *Законъ Количествъ Движенія.* Вмѣсто того, чтобы пользоваться принципомъ отвердѣнія, мы выведемъ этотъ законъ другимъ путемъ, самымъ элементарнымъ. Выводъ будетъ состоять въ обобщеніи законовъ наиболѣе простого динамическаго явленія—паденія тяжелыхъ тѣлъ. Такой пріемъ соотвѣтствуетъ историческому ходу развитія науки; законы Механики сначала подмѣчали на самыхъ простыхъ случаяхъ, а потомъ обобщали ихъ. Такъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній было найдено на рычагѣ, блокахъ и другихъ простыхъ машинахъ. Декартъ высказалъ общій законъ сохраненія количествъ движенія, основываясь на свойствѣ инерціи и законѣ отраженія при ударѣ. Мопертюи, разбирая законы трехъ простыхъ свѣтовыхъ явленій (прямолинейное распространеніе свѣта, отраженіе и преломленіе свѣта) и обобщая ихъ, получилъ Начало Наименьшаго Дѣйствія, какъ общій законъ природы и т. д.

Для скорости v вертикально падающаго тяжелаго тѣла, когда начальная скорость равна нулю, имѣемъ извѣстный законъ

$$v = g.t$$

(g—ускореніе тяжести, t—время). Если же была начальная скорость v_0, то имѣемъ приращеніе скорости:

$$v - v_0 = g.t,$$

или, умножая на массу тѣла m:

$$mv - mv_0 = mgt.$$

Вмѣсто произведенія mg поставимъ равный ему вѣсъ тѣла P и получимъ:

$$mv - mv_0 = P.t \;.\;.\;.\;.\;.\; (36).$$

Произведеніе массы на скорость называется количествомъ движенія тѣла; разность

$$mv - mv_0$$

представляетъ увеличеніе количества движенія, происшедшее за время t, или количество движенія, пріобрѣтенное за время t. Произведеніе силы P на время t назовемъ импульсомъ или толчкомъ силы. Принимая эти термины, мы можемъ прочитать урав. (36) въ формѣ слѣдующей теоремы:

количество движенія, пріобрѣтенное тѣломъ за извѣстное время, равно импульсу или толчку силы, сообщенному тѣлу за то же время.

Для падающихъ тяжелыхъ тѣлъ эта теорема и уравненіе (36) не даютъ ничего новаго; это извѣстные законы паденія тяжелыхъ тѣлъ, высказанные въ другой формѣ. Но примемъ уравненіе (36) за типъ, подъ который постараемся подвести и болѣе сложныя явленія.

Во-первыхъ движеніе часто бываетъ не прямолинейное, а криволинейное. Это усложненіе мы устраняемъ тѣмъ, что разлагаемъ движеніе на три координатныя оси, т. е. замѣняемъ криволинейное движеніе тремя прямолинейными. Уравненіе (36) примѣняемъ къ любому изъ этихъ трехъ движеній; P будетъ означать проекцію силы на соотвѣтствующую координатную ось; v и v_0—будутъ означать скорости по направленію той же оси.

Во вторыхъ: сила P можетъ оказаться не постоянной, а измѣняющейся съ теченіемъ времени. Тогда уравненіе (36) нельзя примѣнять къ конечному промежутку времени t, а только къ безконечно малому промежутку dt. Полное же время t раздѣлимъ на безконечно малыя части dt, и для каждой изъ этихъ частей напишемъ уравненіе такого вида, какъ (36). Называя послѣдовательныя значенія скоростей черезъ

$$v_0,\ v,\ v',\ v'' \ldots\ldots v_{k-1},\ V,$$

а послѣдовательныя значенія перемѣнной силы черезъ

$$P,\ P',\ P'' \ldots\ldots P_k,$$

получаемъ рядъ уравненій

$$\begin{aligned}
mv - mv_0 &= P.dt\\
mv' - mv &= P'.dt\\
mv'' - mv' &= P''.dt\\
&\ldots\ldots\ldots\\
m.V - mv_{k-1} &= P_k.dt.
\end{aligned}$$

Сложимъ всѣ эти уравненія; въ лѣвой части равенства получимъ по сокращеніи

$$mV - mv_0,$$

гдѣ: v_0—начальная скорость

V—окончательная скорость.

Въ правой части равенства получается сумма безконечно большого числа членовъ

$$P.dt + P'.dt + P''.dt + \ldots + P_k.dt.$$

Чтобы сократить письмо, примемъ для этой суммы символическое обозначеніе:

$$\int_0^t P.dt.$$

Слѣд. результатъ сложенія будетъ

$$mV - mv_0 = \int_0^t P.dt \quad \ldots\ldots (37).$$

Лѣвая часть означаетъ количество движенія, пріобрѣтенное массою m за время t; правая можетъ быть названа суммою толчковъ (импульсовъ), полученныхъ этой массой за то же время отъ перемѣнной силы P.

117. До сихъ поръ мы считали, что имѣемъ дѣло съ одной массой m, т. е. съ одной матеріальной точкой. Теперь переходимъ къ произвольной матеріальной системѣ, т. е. любой совокупности матеріальныхъ точекъ. Прежде всего освободимъ эти точки, т. е. замѣнимъ всѣ взаимныя связи ихъ внутренними силами. Тогда можно считать каждую точку свободной, отдѣленной отъ прочихъ, и примѣнять къ ней уравненіе (37); но теперь P означаетъ сумму проекцій внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m.

Напишемъ уравненія вида (37) для каждой матеріальной точки нашей системы и сложимъ всѣ эти уравненія. Употребляя для означенія суммы обыкновенный символъ Σ, получимъ уравненіе:

$$\Sigma(mV) - \Sigma mv_0 = \Sigma \left\{ \int_0^t P.dt \right\} \ldots (38).$$

Лѣвая часть равенства содержитъ въ себѣ сумму количествъ движенія, пріобрѣтенныхъ отдѣльными точками. Въ правой—находится сумма толчковъ (импульсовъ), сообщенныхъ всѣми силами, дѣйствующими на точки, входящія въ составъ системы. Уравненіе это выражаетъ теорему:

Количество движенія, пріобрѣтенное всей системой по какому нибудь направленію (т. е. по направленію какой нибудь координатной оси), равно суммѣ импульсовъ, сообщенныхъ всѣми силами по тому же направленію.

Эта теорема и представляетъ Законъ Количествъ Движенія. Онъ изображается тремя уравненіями такого вида, какъ (38), т. е. по одному уравненію для каждой координатной оси.

119. *Законъ живыхъ силъ.* Оставимъ на время законъ количествъ движенія и выведемъ законъ живыхъ силъ. Эти два основные закона очень удобно разсматривать параллельно и сравнительно; выяснивъ сходство и различіе ихъ, мы увидимъ, въ какихъ случаяхъ долженъ примѣняться тотъ или другой законъ.

Законъ живыхъ силъ мы получимъ, также исходя изъ простого явленія—паденія тяжелыхъ тѣлъ. Когда путь, пройденный падающимъ тѣломъ, есть h, то скорость паденія v получается изъ формулы

$$v^2 = 2gh,$$

если начальная скорость была нуль. Если же имѣлась начальная скорость v_0, то по прохожденіи пути h получается скорость v, опредѣляемая уравненіемъ

$$v^2 - v_0^2 = 2gh.$$

Умножая на массу падающаго тѣла m, получимъ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg.h;$$

или, замѣняя произведеніе mg вѣсомъ тѣла P,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = P.\,h \;.\;.\;.\; (39).$$

Половина произведенія изъ массы на квадратъ скорости называется живой силой движущагося тѣла *). Разность

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

стоящая въ лѣвой части уравненія (39), есть приращеніе живой силы, происшедшее на пути h.

*) „Vis Viva". Терминъ этотъ ведетъ свое начало отъ Лейбница. Но прежде часто называли живой силой произведеніе mv^2, а не половину его.

Въ правой части равенства (39) находится произведеніе силы на пройденный путь. Оно называется работой силы P, произведенной ею на протяженіи пути h.

Принявъ эти термины, мы прочтемъ уравненіе (39) въ видѣ слѣдующей теоремы:

Живая сила, пріобрѣтенная тѣломъ при прохожденіи извѣстнаго пути, равна работѣ, произведенной силой на протяженіи этого пути.

Для паденія тяжелыхъ тѣлъ эта теорема не даетъ ничего новаго; она только выражаетъ другими словами давно извѣстные законы явленія. Но для насъ уравн. (39) имѣетъ значеніе какъ типъ, подъ который мы постараемся подвести гораздо болѣе сложные случаи движенія.

Первое усложненіе состоитъ въ томъ, что движеніе часто бываетъ не прямолинейное, а криволинейное. Мы знаемъ, что тогда ускореніе по касательной равно производной отъ скорости по времени

$$\frac{dv}{dt}.$$

Но съ другой стороны мы получимъ то же ускореніе, если возьмемъ слагающую $P\cos\varphi$ внѣшней силы по касательной и раздѣлимъ ее на массу движущейся матеріальной точки m. Уравнивая эти два выраженія, получимъ для криволинейнаго движенія:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{P.\cos\varphi}{m}.$$

Между тѣмъ для прямолинейнаго движенія получается

$$\frac{dv}{dt}=\frac{P}{m}.$$

Единственное различіе между этими двумя выраженіями состоитъ въ томъ, что въ случаѣ криволинейнаго движенія, вмѣсто полной силы P, стоитъ ея проекція $P\cos\varphi$ на касательную къ пути. Такое сходство указываетъ, что всѣ выводы относительно величины скорости, полученные для прямолинейнаго движенія, можно прямо примѣнить и къ случаю криволинейнаго, замѣнивъ лишь силу P ея проекціей $P.\cos\varphi$. Поэтому мы можемъ сдѣлать это и съ урав. (39) и получимъ:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=P.\cos\varphi.h \quad . \; . \; . \; . \; . \; (40).$$

Условимся здѣсь называть работой силы произведеніе

$$P.\mathrm{Cos}\ \varphi.h,$$

тогда уравненіе (40) можетъ быть прочтено въ формѣ буквально той же самой теоремы, какъ и уравненіе (39) прямолинейнаго движенія.

Введемъ дальнѣйшее усложненіе: пусть сила $P.\mathrm{Cos}\ \varphi$ не постоянная, а измѣняется на протяженіи пути h. Тогда уравненіе (40) можно примѣнять только на протяженіи безконечно малаго пути dh. Весь путь h раздѣлимъ на безконечно малыя части dh и примѣнимъ урав. (40) для каждой изъ этихъ частей. Послѣдовательныя значенія скоростей назовемъ буквами:

$$v_0,\ v,\ v_1,\ v_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ v_{n-1}\ V,$$

а значеніе силы $P.\mathrm{Cos}\ \alpha$ для послѣдовательныхъ частей полнаго пути h пусть будутъ:

$$P.\mathrm{Cos}\ \varphi,\ P_1.\mathrm{Cos}\ \varphi_1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ P_n.\mathrm{Cos}\ \varphi_n$$

Тогда получимъ рядъ уравненій:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=P.\mathrm{Cos}\ \varphi.dh$$

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=P_1\mathrm{Cos}\ \varphi_1 dh$$

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=P_2\mathrm{Cos}\ \varphi_2.dh$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mv^2_{n-1}}{2}=P_n\ \mathrm{Cos}.\ \varphi_n\ dh.$$

Сложимъ всѣ эти уравненія; въ результатѣ въ лѣвой части, по сокращеніи получимъ

$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2},$$

т. е. живую силу, пріобрѣтенную на протяженіи всего пути h. Въ правой же части получимъ сумму элементарныхъ работъ, т. е. сумму работъ, произведенныхъ силою на протяженіи элементовъ пути. Число членовъ суммы безконечно большое, и для обозначенія ея примемъ символъ:

$$\int_0^h P.\mathrm{Cos}\ \varphi.dh.$$

Итакъ суммированіе дастъ намъ уравненіе:

$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_0^h P.\mathrm{Cos}\ \varphi.dh\ \ .\ .\ .\ .\ (41),$$

которое на словахъ выражается той же теоремой о живой силѣ какъ и прежде, а именно: указываетъ на равенство между пріобрѣтенной живой силой и работой.

Наконецъ введемъ послѣднее усложненіе; вмѣсто одной матеріальной точки введемъ произвольную механическую систему. Ее можно разсматривать какъ совокупность произвольнаго числа матеріальныхъ точекъ; замѣняя всѣ внѣшнія и внутреннія связи силами, мы можемъ каждую изъ этихъ точекъ считать свободной, и слѣд. можно для каждой изъ нихъ написать уравненіе такого же вида и содержанія, какъ (41). Напишемъ всѣ эти уравненія и затѣмъ просуммируемъ ихъ. Обозначая суммированіе знакомъ Σ, получимъ:

$$\frac{\Sigma m V^2}{2} - \frac{\Sigma m v_0{}^2}{2} = \Sigma \int_0^h P.\mathrm{Cos}\,\varphi.dh \;.\;.\;.\;.\;.\; (42).$$

Это уравненіе изображаетъ законъ живыхъ силъ для системы:

живая сила, пріобрѣтенная всей системой на протяженіи извѣстнаго пути, равна суммѣ работъ, произведенныхъ на этомъ пути силами, приложенными ко всѣмъ точкамъ системы.

120. *Сравненіе закона количествъ движенія съ закономъ живыхъ силъ.* Какъ въ тотъ, такъ и въ другой изъ этихъ законовъ входятъ скорости движенія—начальныя и конечныя. Въ этомъ состоитъ сходство двухъ законовъ. Посмотримъ, въ какихъ отношеніяхъ они различаются между собою; такое сравненіе укажетъ намъ, когда нужно примѣнять первый законъ и въ какихъ случаяхъ—второй.

Въ уравненіе количествъ движенія входятъ проекціи силъ, умноженныя на элементы времени, и для каждой матеріальной точки сумма импульсовъ представляется безконечной суммой

$$P.dt + P'.dt + P''.dt + \;.\;.\;.$$

Если проекціи силъ выражаются какъ нѣкоторыя функціи времени, то такая безконечная сумма изобразится опредѣленнымъ интеграломъ

$$\int_0^t P.dt,$$

нижній предѣлъ котораго соотвѣтствуетъ начальному моменту времени, а верхній—окончательному. Такой интегралъ можетъ быть найденъ; или мы получимъ точное выраженіе его въ извѣстныхъ функціяхъ, или выразимъ его величину приблизительно, при помощи формулъ для квадратуръ. Если это относится ко всѣмъ матеріальнымъ точкамъ системы, то вторая часть урав. (38), т. е.

$$\Sigma\int_0^t P.dt$$

будетъ найдена, и слѣд. мы получаемъ уравненіе, въ которое входятъ **не ускоренія**, какъ въ Даламберовомъ Началѣ, а **скорости**. Это уже будетъ **интегралъ** уравненій движенія; и такъ въ этомъ случаѣ законъ количествъ движенія можетъ быть названъ **интеграломъ количествъ движенія**.

Обращаясь къ уравненію живыхъ силъ, мы встрѣчаемся съ безконечной суммой, въ которой проекціи силъ умножаются на элементы пути

$$P.\mathrm{Cos}\ \varphi.dh + P'',\mathrm{Cos}\ \varphi^1 dh + \ldots$$

Если проекціи силъ представляютъ извѣстныя функціи пройденнаго пути, то эта безконечная сумма изобразится опредѣленнымъ интеграломъ

$$\int_0^h P.\mathrm{Cos}\ \varphi.dh;$$

предѣлы интегрованія—начальное и окончательное положенія движущейся точки. Такой интегралъ можетъ быть найденъ. Если это относится ко всѣмъ точкамъ системы, то мы получимъ сумму работъ всѣхъ силъ

$$\int_0^h \Sigma P.\mathrm{Cos}\ \varphi.dh$$

и будемъ знать ея величину. Тогда уравненіе (42) будетъ интеграломъ уравненій движенія; это—**интегралъ живыхъ силъ**.

И такъ оба наши закона даютъ интегралы уравненій движенія; законъ количествъ движенія даетъ такой интегралъ, когда проекціи силъ суть функціи времени; законъ живыхъ силъ даетъ интегралъ въ тѣхъ случаяхъ, когда проекціи силъ представляютъ функціи пройденнаго пути. Этимъ опредѣляется выборъ того или другого закона для рѣшенія частнаго заданнаго вопроса.

Укажемъ для примѣра на задачу Внутренней Баллистики: зная давленіе пороховыхъ газовъ въ пушкѣ, найти скорость, съ которой снарядъ вылетитъ изъ орудія. Давленіе пороховыхъ газовъ во время выстрѣла не постоянное, а перемѣняется по нѣкоторому закону; явленіе это изслѣдуется опытомъ при помощи различныхъ приборовъ. Иногда эти приборы автографическіе, т. е. сами чертятъ діаграмму, изображающую постепенное измѣненіе давленія. Положимъ, что мы имѣемъ приборъ, который изображаетъ измѣненіе давленія въ зависимости отъ времени. Тогда, для нахожденія скорости вылета снаряда, мы должны воспользоваться закономъ количествъ движенія. Но если нашъ приборъ показываетъ давленіе пороховыхъ газовъ въ зависимости отъ пути, пройденнаго снарядомъ по каналу орудія, то нужно обратиться къ закону живыхъ силъ; пользуясь имъ, найдемъ скорость.

121. Законъ живыхъ силъ приходится примѣнять довольно часто, такъ какъ многія силы природы суть функціи разстоянія. Такова, напр., сила всемірнаго тяготѣнія; вѣроятно таковы же и многія молекулярныя дѣйствія. Очень распространенная физическая гипотеза, ведущая свое начало со временъ Ньютона, допускаетъ, что всѣ вообще силы природы имѣютъ такой характеръ, т. е. зависятъ только отъ разстояній между матеріальными частицами. Принимая эту гипотезу, мы получаемъ обширную область примѣненія закона живыхъ силъ.

Но на практикѣ, пользуясь разными приборами и искусственными средствами возбужденія движенія, мы нерѣдко получаемъ силы какъ функціи времени. Это въ особенности часто встрѣчается теперь съ распространеніемъ машинъ перемѣннаго тока, пользуясь которыми, получаютъ силы, измѣняющіяся по закону

$$P = A.\mathrm{Sin}\ kt \ . \ . \ . (43)$$

(t — время, A, k — постоянные), или по закону, изображающемуся суммою членовъ такого вида, какъ (43), но съ различными численными величинами коефиціентовъ A, k. Въ этихъ случаяхъ нужно обращаться къ закону количествъ движенія.

Когда сила постоянная, то можно безразлично примѣнять какъ законъ количествъ движенія, такъ и законъ живыхъ силъ.

122. *Какія неизвѣстныя исключаются во время составленія уравненій.* Легко видѣть, что при составленіи уравненія количествъ движенія исключаются всѣ внутреннія силы. Это есть слѣдствіе третьяго Ньютонова закона, т. е. равенства между дѣйствіемъ и противудѣйствіемъ. Внутреннія силы въ системѣ будутъ всегда встрѣчаться по двѣ равныя и противу-

положныя. Когда же составляемъ импульсъ силы, то беремъ проекцію силы и умножаемъ ее на элементъ времени; эти выраженія для двухъ равныхъ, но противуположныхъ силъ будутъ равны, но съ обратными знаками. Слѣд. эти два импульса взаимно сократятся, и всѣ внутреннія силы исчезнутъ изъ уравненія количествъ движенія. Такое исключеніе значительнаго числа неизвѣстныхъ, притомъ такихъ, которыя трудно опредѣлить, указываетъ на особое значеніе закона количествъ движенія и на важность его для приложеній.

Обращаясь теперь къ уравненію живыхъ силъ, видимъ, что въ него будутъ входить работы внутреннихъ силъ, т. е. проекціи силъ, умноженныя на перемѣщенія тѣхъ точекъ, къ которымъ силы приложены. Хотя взаимодѣйствія двухъ матеріальныхъ точекъ равны и прямо противуположны, но перемѣщенія этихъ точекъ могутъ быть неодинаковы. Тогда работы двухъ взаимныхъ силъ не будутъ равны между собою, и слѣд. не произойдетъ сокращенія этихъ работъ и исчезновенія внутреннихъ силъ изъ уравненія. И такъ, говоря вообще, внутреннія силы не исчезаютъ изъ уравненія живыхъ силъ. Но мы увидимъ въ 13-й бесѣдѣ, что въ частныхъ случаяхъ такое исчезновеніе происходитъ, и тогда уравненіе живыхъ силъ пріобрѣтаетъ особое значеніе.

123. Изъ уравненія живыхъ силъ исчезнутъ тѣ внѣшнія силы, которыя приложены къ неподвижнымъ точкамъ; дѣйствительно работа этихъ силъ всегда равна нулю. Сюда относятся многія реакціи опоръ и т. п. силы. Примѣняя уравненіе живыхъ силъ, мы ихъ исключаемъ и можемъ совершенно игнорировать эти реакціи.

Фиг. 106.

Такъ какъ работа силы P для перемѣщенія s (фиг. 106) есть произведеніе

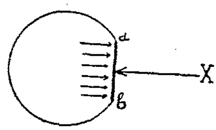
$$P.\mathrm{Cos}\ \varphi.s,$$

то эта работа обращается въ нуль въ случаѣ, когда уголъ φ равенъ нулю. Слѣд. при составленіи уравненія живыхъ силъ, исчезнутъ всѣ тѣ силы, которыя перпендикулярны къ перемѣщеніямъ своихъ точекъ приложенія. Вотъ еще разрядъ силъ исчезающихъ изъ этого уравненія, чѣмъ упрощается рѣшеніе.

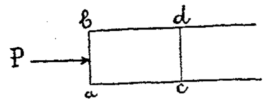
Между тѣмъ импульсъ силы, приложенной къ неподвижной точкѣ, не равенъ нулю. Также не обращается въ нуль импульсъ той силы, которая перпендикулярна къ перемѣщенію. Слѣд. эти два разряда силъ не исчезаютъ изъ уравненія количества движенія. Напр. реакціи неподвижныхъ опоръ будутъ входить въ эти уравненія явнымъ образомъ. Поэтому уравненіе количествъ движенія можетъ быть примѣняемо для нахожденія такихъ реакцій, и въ этомъ состоитъ его значеніе для приложеній. Уравненіе живыхъ силъ для такой цѣли вовсе не пригодно, такъ какъ реакціи въ него совсѣмъ не входятъ.

124. Вотъ напримѣръ вопросы, для рѣшенія которыхъ слѣдуетъ примѣнять уравненіе количествъ движенія.

a) ***Въ кинетической теоріи газовъ*** мы считаемъ, что давленіе газа на стѣнку сосуда получается вслѣдствіе ряда ударовъ, производимыхъ частицами газа на стѣнку. Для опредѣленія такого давленія, отдѣлимъ часть *ab* (фиг. 107) отъ остальнаго сосуда и приложимъ къ ней удерживающую силу X; она и представитъ искомое давленіе. Система наша будетъ состоять изъ этой части стѣнки и ударяющихъ въ нее частицъ газа; къ



Фиг. 107.



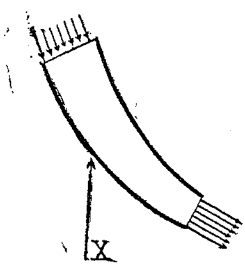
Фиг. 108.

этой системѣ прикладываемъ законъ количествъ движенія по направленію перпендикуляра къ *ab*. При этомъ силы, развивающіяся въ мѣстахъ удара частицъ газа о стѣнку *ab*, исключаются, такъ какъ это внутреннія силы; намъ не нужно знать ни величинъ, ни законовъ для этихъ силъ. Это исключеніе очень упрощаетъ выводъ. Какъ извѣстно, въ результатѣ получается комбинированный законъ Маріотта и Гейлюссака.

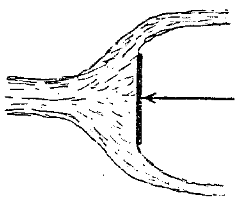
b) ***Скорость, съ которой передается давленіе въ твердомъ тѣлѣ.*** Пусть на концѣ бруска (фиг. 108) приложена сжимающая сила P. Сжатіе, производимое ею, передается по длинѣ бруска постепенно, отъ одного конца къ другому, съ нѣкоторою скоростью, которую желаемъ опредѣлить. Положимъ, что по прошествіи времени t сжатіе будетъ передано до сѣченія cd. Примѣнимъ Законъ Количества Движенія по направленію силы P къ части бруска *abcd*, и будемъ разсматривать движеніе этой системы въ теченіи времени t. Здѣсь мы имѣемъ одну внѣшнюю силу P. Всѣ же силы упругости, появляющіяся въ *abcd* вслѣдствіе сжатія, исключаются, такъ какъ это внутреннія силы. Получается очень простой выводъ, въ результатѣ котораго находимъ извѣстный законъ:

скорость распространенія сжатія (или растяженія) равна корню квадратному изъ коэффиціента упругости матеріала, раздѣленнаго на плотность.

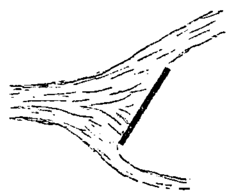
c) *Давленіе, производимое на сосудъ жидкостью, протекающей черезъ него* (фиг. 109). Положимъ, что мы желаемъ опредѣлить величину этого давленія по вертикальному направленію, или вмѣсто того обратную искомому давленію вертикальную реакцію той X опоры, которая удерживаетъ сосудъ.



Фиг. 109.



Фиг. 110.



Фиг. 111.

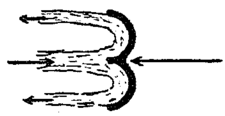
Здѣсь нужно разсматривать количество движенія по направленію X. Всѣ давленія между текущей жидкостью и стѣнками сосуда представляютъ внутреннія силы, которыя поэтому исключаются изъ уравненія. Слѣдовательно, избравъ для рѣшенія нашего вопроса Законъ Количествъ Движенія, мы избавляемся отъ необходимости разбирать всѣ эти давленія и искать ихъ значенія.

Нужно принять во вниманіе, что давленіе жидкости во время движенія не всегда слѣдуетъ гидростатическому закону [1]), поэтому если бы пришлось разсматривать давленія, то это повлекло бы за собою очень значительныя усложненія, а вслѣдствіе сложности выводовъ нерѣдко въ этомъ вопросѣ дѣлали ошибки и приходили къ невѣрнымъ результатамъ.

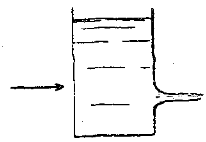
d) Примѣняя Законъ Количествъ Движенія, рѣшаютъ въ Гидравликѣ слѣдующіе вопросы: найти давленіе, производимое движущейся струей воды на прямую лопатку (фиг. 110, 111), или на ковшъ колеса Пелтона (фиг. 112), или найти реакцію вытекающей струи на сосудъ, содержащій жидкость (фиг. 113) и

[1]) См. n° 71.

т. д. И здѣсь достигается исключеніе давленій между водою и лопаткой или ковшемъ, или сосудомъ.



Фиг. 112.



Фиг. 113.

125. ***Векторіальный характеръ закона количествъ движенія.*** Выводя его, мы разложили движеніе на три координатныя оси и разсматривали отдѣльно каждую изъ трехъ проекцій; полученное уравнніе (38) относится къ одной изъ нихъ.

Такое же уравненіе мы можемъ написать и для двухъ другихъ координатныхъ осей, и вообще для любого постояннаго направленія. Но въ каждомъ изъ этихъ уравненій количества движенія всѣхъ точекъ

$$mV, \ mv_0$$

и проекціи силъ имѣютъ всѣ одно и то же направленіе.

Иначе обстоитъ дѣло съ живой силой. Въ нее входитъ абсолютная полная величина скорости, а не ея проекція, и живая сила есть величина, не имѣющая направленія. Вотъ еще одна черта различія между уравненіемъ количествъ движенія и уравненіемъ живыхъ силъ. Въ первое входятъ величины, имѣющія опредѣленное направленіе; количества движенія суть векторы. Между тѣмъ живая сила не есть векторъ; она относится къ разряду скаларовъ, величинъ, не имѣющихъ направленія.

126. Для избѣжанія недоразумѣній замѣтимъ, что можно было бы вести выводъ уравненія количествъ движенія такъ же, какъ мы выводили уравненіе живыхъ силъ, т. е. не разлагая криволинейное движеніе на три прямолинейныхъ, а разсматривая полную величину скорости. Начнемъ съ уравненія, дающаго ускореніе по касательной:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P.\mathrm{Cos}\,\varphi}{m}.$$

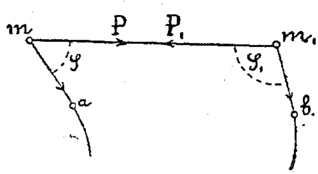
Умножая его на m.dt и интегрируя въ предѣлахъ отъ нуля до t, получимъ для одной матеріальной точки

$$mV - mv_0 = \int_0^t P.\mathrm{Cos}\,\varphi.dt \quad . \ . \ . \ . \ (44),$$

а для системы:

$$\Sigma mV - \Sigma mv_0 = \Sigma \int_0^t P.Cos\varphi.dt, \quad . \ . \ . \ . \ . \ (45).$$

При рѣшенiи вопросовъ о движенiи одной матерiальной точки такая форма уравненiя количествъ движенiя можетъ быть примѣнена и иногда оказывается полезной. Но она не имѣетъ никакого значенiя въ случаѣ системы, потому что въ уравненiи (45) внутреннiя силы, вообще говоря, не исключаются. Разсмотримъ взаимодѣйствiе двухъ матерiальныхъ точекъ m и m_1 (фиг. 114); эти внутреннiя силы P, P_1 равны и противуположны. Пусть первая точка движется по ma, вторая—по m_1b_1, тогда въ уравненiе (45) первая сила войдетъ умноженная на Cos φdt, а вторая—умножается на Cos $\varphi_1$dt. Сумма этихъ импульсовъ



Фиг. 114.

$$(P.Cos\ \varphi + P.Cos\ \varphi_1)\ dt$$

обратится въ нуль только тогда, если углы φ и φ_1 взаимно дополнительные до 180°, т. е. тогда, если перемѣщенiя точекъ m, m_1 постоянно параллельны одно другому. Такое условiе должно быть выполнено для каждой пары точекъ, входящихъ въ систему и дѣйствующихъ другъ на друга, если мы желаемъ, чтобы всѣ внутреннiя силы сократились. Но выполненiе такого условiя представляетъ рѣдкiй случай. Оно удовлетворяется при поступательномъ движенiи тѣла, т. е. когда всѣ точки тѣла движутся одинаково; тогда мы можемъ систему замѣнить одной точкой. Во всѣхъ другихъ случаяхъ внутреннiя силы не исчезаютъ изъ урав. (45). Даже при соблюденiи неизмѣнности формы и размѣровъ движущагося тѣла, всѣ молекулярныя силы этого тѣла войдутъ въ уравненiе (45). Конечно при этомъ самое уравненiе теряетъ всякое значенiе. Вотъ почему, въ случаѣ движенiя системы, уравненiе количествъ движенiя имѣетъ смыслъ только при проектированiи движенiя на опредѣленное направленiе.

127. *Сохраненiе количествъ движенiя.* Важный частный случай получается, когда имѣемъ изолированную систему, на которую не дѣйствуютъ внѣшнiя силы. А такъ какъ внутреннiя силы исключаются, то уравненiе (38) получаетъ видъ

$$\Sigma mV - \Sigma mv_0 = 0 \text{ или } \Sigma mV = \Sigma mv_0,$$

т. е. количество движенія всей системы не измѣняется съ теченіемъ времени; оно сохраняетъ свою начальную величину. Въ этомъ состоитъ законъ сохраненія количествъ движенія. Но онъ справедливъ только подъ условіемъ, что мы разсматриваемъ количества движенія по одному опредѣленному направленію. Если бы брали абсолютную величину количества движенія, т. е. урав. (45), то внутреннія силы не исключились бы и величина количества движенія оказалась бы измѣняющеюся, не смотря на отсутствіе внѣшнихъ силъ.

128. *Нѣсколько историческихъ замѣчаній.* Декарту принадлежитъ первое указаніе на законъ сохраненія количествъ движенія, какъ на основной міровой законъ. Въ своихъ соображеніяхъ онъ исходилъ изъ простѣйшихъ явленій удара тѣлъ, отраженія шарика послѣ удара его о плоскость; присоединяя къ этому законъ инерціи и обобщая, онъ вывелъ заключеніе о сохраненіи количества движенія въ природѣ. Но Декартъ предполагалъ, что постояннымъ остается абсолютное количество движенія, и не замѣтимъ, что количество движенія есть величина векторіальная *). Такой недосмотръ вполнѣ объясняется, если вспомнимъ, что въ то время еще не былъ вполнѣ установленъ даже законъ параллелограмма силъ, т. е. въ наукѣ еще не опредѣлилось общее понятіе о векторіальныхъ величинахъ.

Съ нашей современной точки зрѣнія представляется страннымъ составленіе такого широкаго обобщенія, какъ законъ сохраненія количества движенія въ природѣ, на основаніи очень небольшого числа замѣченныхъ явленій. Но Декартъ, въ своихъ выводахъ, сюда относящихся, основывался главнымъ образомъ на метафизическихъ соображеніяхъ; на законъ сохраненія количества движенія въ природѣ онъ смотрѣлъ, какъ на необходимость, вызываемую тѣмъ, что міръ созданъ Творцомъ, а Богъ никогда не измѣняетъ свой способъ дѣйствія, и сохраняетъ міръ съ тѣмъ же самымъ количествомъ движенія, съ какимъ онъ его создалъ. По Декарту законы Динамики основаны на неизмѣнности Божества; свойство инерціи и явленія при ударѣ приводятся имъ только какъ иллюстраціи.

Такой способъ разсужденія былъ довольно распространенъ въ XVII-мъ столѣтіи. Самыя широкія обобщенія дѣлались на основаніи очень небольшого числа фактовъ; метафизическія со-

*) См. Henri Bouasse. Introduction à l'étude des théories de la Mécanique. 1895 г.

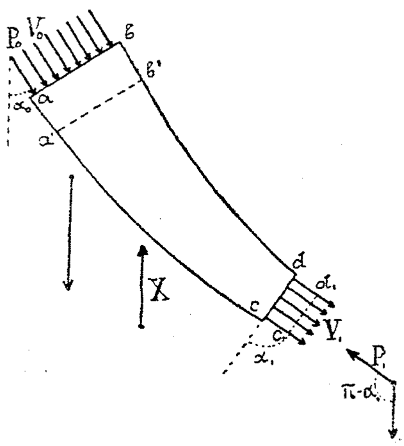
ображенія имѣли первостепенное значеніе и пользовались общимъ довѣріемъ. Возраженія противъ подобныхъ выводовъ представлялись только крайними скептиками; такъ Декарту возражалъ Гоббсъ, не соглашавшійся съ тѣмъ, что божественная неизмѣняемость требуетъ закона сохраненія количества движенія. Но и много позже, въ XVIII-мъ столѣтіи, даже замѣчательные ученые продолжали руководствоваться метафизическими соображеніями. Самый интересный фактъ въ этомъ направленіи въ области Динамики представляетъ открытіе Начала Наименьшаго Дѣйствія, сдѣланное Мопертюи въ 1744 году. Этотъ знаменитый ученый вывелъ названное общее Начало Механики, основываясь исключительно на слѣдующихъ трехъ явленіяхъ свѣта: a) прямолинейное распространеніе свѣта; b) отраженіе свѣта; c) преломленіе свѣта. Онъ придерживался Теоріи Истеченія и на явленія свѣта смотрѣлъ, какъ на чисто механическія, какъ на движеніе частицъ эфира. Мопертюи старался связать законы перечисленныхъ явленій, выразить ихъ одной общей теоремой; въ результатѣ такого стремленія онъ пришелъ къ Началу Наименьшаго Дѣйствія. Но для того, чтобы это Начало могло дать извѣстный законъ преломленія свѣта, Мопертюи принужденъ былъ допустить, что скорость свѣта въ болѣе плотной средѣ больше, чѣмъ въ менѣе плотной. Подведя указанныя три явленія подъ одинъ законъ, Мюпертюи далѣе уже совершенно догматически ставитъ Начало Наименьшаго Дѣйствія какъ общій міровой законъ для всѣхъ движеній, встрѣчающихся въ природѣ.

Такимъ образомъ общій законъ Динамики, охватывающій всѣ случаи движенія, былъ выведенъ на основаніи того, что было извѣстно изъ опыта относительно трехъ простѣйшихъ явленій свѣта. Но вѣдь свѣтъ только гипотетически можетъ считаться движеніемъ; во всякомъ случаѣ это невидимыя движенія гипотетическаго тѣла. Притомъ взята была невѣрная гипотеза свѣта—Теорія истеченія. Кромѣ того, мы теперь знаемъ изъ опыта, что скорость свѣта въ болѣе плотной средѣ меньше, чѣмъ въ менѣе плотной, т. е. получается результатъ, обратный допущенію Мопертюи. И, не смотря на такое накопленіе ошибокъ, найденъ былъ вѣрный законъ Механики, который съ нѣкоторыми измѣненіями и дополненіями удержался и до сихъ поръ въ наукѣ! Это одинъ изъ многочисленныхъ примѣровъ того, что великіе люди счастливы въ своихъ ошибкахъ и недосмотрахъ.

И Мопертюи, подобно Декарту, выводя общій законъ движенія, основывался главнымъ образомъ на метафизическихъ взглядахъ касательно цѣлесообразности природы, на томъ соображеніи, что въ природѣ всякій результатъ достигается простѣйшимъ путемъ, что природа представляетъ наилучшій изъ всѣхъ возможныхъ міровъ и т. д. Основное положеніе его при установленіи Начала Наименьшаго Дѣйствія состоитъ въ томъ, что безъ сомнѣнія міръ созданъ Высшимъ Существомъ, а въ послѣдующихъ своихъ мемуарахъ онъ пользуется Началомъ Наименьшаго Дѣйствія какъ главнымъ доказательствомъ существованія Бога *).

129. ***Примѣръ приложенія Закона Количествъ Движенія.*** Разберемъ до конца вопросъ о давленіи, производимомъ на сосудъ водой, которая протекаетъ черезъ него.

Приемъ слѣдующую постановку задачи: вода течетъ по трубѣ *ab*cd (фиг. 115) непрерывной струей, заполняя сплошь всю трубу, притомъ движеніе установившееся. Этимъ терминомъ означаютъ такое движеніе, при которомъ въ каждой точкѣ внутри трубы явленія не перемѣняются съ теченіемъ времени, а остаются постоянными; т. е. въ каждой точкѣ давленіе, а также величина и направленіе скорости остаются неизмѣнными.



Фиг. 115.

Пусть черезъ каждое сѣченіе трубы протекаетъ въ секунду объемъ воды Q. Труба сдѣлана неподвижной, посредствомъ прикрѣпленія ея къ опорѣ. Требуется опредѣлить вертикальное давленіе, производимое трубою на опору, или, вмѣсто того, найти обратную этому давленію реакцію опоры X.

Вода вступаетъ въ трубу въ верхнемъ отверстіи ея *ab* (площадь котораго назовемъ Ω_0) со скоростями V_0, направленными перпендикулярно къ *ab* и наклоненными къ вертикали

*) См. собраніе сочиненій Мопертюи: Ouevres de M-r de Maupertuis, Nouv. édition. Lyon. 1756. Мемуаръ, въ которомъ доказано Начало Наименьшаго Дѣйствія, находится въ IV-мъ томѣ этого собранія и носитъ заглавіе: „Accord des differentes loix de la nature, qui avoient jusqu'içi paru incompatibles"; онъ былъ прочитанъ въ засѣданіи Парижской Академіи Наукъ 15-го Апрѣля 1744 года.

подъ угломъ α_0. Постоянное давленіе въ этомъ сѣченіи назовемъ p_0; оно совпадаетъ съ направленіемъ скорости V_0.

Вода вытекаетъ изъ нижняго отверстія cd; площадь этого отверстія, скорость воды въ немъ, уголъ наклона ея и давленіе жидкости въ отверстіи назовемъ тѣми же буквами, что и для верхняго отверстія, но только съ другимъ подстрочнымъ знакомъ, а именно примемъ обозначенія:

$$\Omega_1,\ V_1,\ \alpha_1,\ p_1.$$

Здѣсь давленіе p_1 на воду, заключающуюся въ трубѣ, прямо противуположно скорости V_1.

Замѣтимъ, что давленія p_0 и p_1 иногда представляютъ дѣйствіе атмосферы. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ эти давленія могутъ значительно отличаться отъ атмосфернаго. Это будетъ напр. въ томъ случаѣ, когда вода втекаетъ въ отверстіе *ab* изъ особаго резервуара, наполненнаго жидкостью; истеченіе воды изъ cd тоже можетъ происходить не въ атмосферу, а въ особый резервуаръ, наполненный водою и находящійся подъ нѣкоторымъ напоромъ.

130. Чтобы найти вертикальную реакцію X, напишемъ для оси X уравненіе Количествъ Движенія для совокупности сосуда *ab*cd и жидкости, его наполняющей. Такъ какъ движеніе установившееся, т. е. въ каждой точкѣ явленія не измѣняются съ теченіемъ времени, то нѣтъ надобности брать въ разсмотрѣніе продолжительный періодъ времени. Достаточно разсмотрѣть очень небольшой и даже безконечно малый промежутокъ времени dt; такъ мы и сдѣлаемъ и напишемъ уравненіе Количествъ Движенія для этого безконечно малаго времени. Для этого нужно прежде всего вычислить количество движенія, пріобрѣтенное жидкостью *ab*cd въ теченіи времени dt по вертикальному направленію. Составимъ выраженіе для этого количества движенія.

За время dt жидкость, наполняющая сосудъ *ab*cd, получитъ безконечно малое перемѣщеніе; частицы, которыя лежали въ сѣченіи ab, займутъ положеніе $a'b'$; частицы, которыя занимали выходное сѣченіе cd, перейдутъ въ положеніе c_1d_1. Подобнымъ же образомъ передвинутся и прочія частицы воды. Перейдя въ другія точки трубы, эти частицы измѣнятъ свои скорости, такъ какъ въ разныхъ мѣстахъ по длинѣ трубы скорости, вообще говоря, не одинаковыя. Совокупность всѣхъ этихъ измѣненій для всѣхъ частицъ воды, наполняющей сосудъ, и доставитъ полное измѣненіе Количества Движенія.

Пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что движеніе установившееся, мы можемъ очень просто сосчитать это полное измѣненіе количества движенія, происшедшее за время dt. Для этого замѣтимъ, что начальное количество движенія всей жидкости $abcd$ можно разсматривать состоящимъ изъ двухъ частей: первую часть составляетъ количество движенія объема воды $aba'b'$, а вторую часть—количество движенія объема $a'b'cd$.

По прошествіи времени dt, наша жидкость занимаетъ объемъ $a'b'c_1d_1$; ея количество движенія можно разсматривать состоящимъ изъ двухъ частей: первую часть представляетъ количество движенія части cdc_1d_1, а вторую часть—количество движенія части $a'b'cd$.

Изъ этого описанія видно, что вторыя части количествъ движенія одинаковы для начала и конца промежутка dt. Слѣд. измѣненіе количества движенія, происшедшее за это время, опредѣляется разностью количествъ движенія объемовъ воды cdc_1d_1 и $aba'b'$.

Эти объемы одинаковы, такъ какъ черезъ каждое сѣченіе трубы проходитъ одинаковое количество жидкости, а именно Q въ единицу времени, т. е. за время dt, пройдетъ объемъ.

$$Q.dt.$$

Масса этой воды получится, умножая ее на вѣсъ $\triangle$ единицы объема и дѣля на ускореніе тяжести g. Чтобы получить измѣненіе количества движенія по вертикальному направленію, нужно массу умножить на разность вертикальныхъ проекцій скоростей, т. е. на

$$V_1 \operatorname{Cos} \alpha_1 - V_0 \operatorname{Cos} \alpha_0.$$

Окончательно находимъ нужное намъ измѣненіе количества движенія въ такомъ видѣ:

$$Q.\frac{\triangle}{g}.dt\,(V_1 \operatorname{Cos} \alpha_1 - V_0 \operatorname{Cos} \alpha_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (46).$$

Перейдемъ теперь къ составленію суммы импульсовъ внѣшнихъ. силъ.

Мы уже знаемъ, что взаимныя давленія между частями жидкости $abcd$, а также давленія, между текущей жидкостью и сосудомъ представляютъ внутреннія силы нашей системы и потому не войдутъ въ наше уравненіе. Въ него слѣдуетъ ввести слѣдующія внѣшнія силы: а) вѣсъ жидкости и сосуда; ихъ совокупность назовемъ P; b) реакцію X опоры на нашъ сосудъ; эту реакцію считаемъ направленной вверхъ; c) внѣшнія давленія на сѣченія ab и cd, ограничивающія нашу жидкость. Эти давленія будутъ

$$p_0\Omega_0,\ p_1\Omega_1,$$

а ихъ вертикальныя проекціи:

$$p_0\,\Omega_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0,\ p_1\,\Omega_1\,\mathrm{Cos}\,\alpha_1.$$

Такъ какъ мы желаемъ найти измѣненіе Количества Движенія по вертикали, направленной внизъ, то импульсы вертикальныхъ силъ, идущихъ внизъ, должны считать положительными, а импульсы силъ, направленныхъ вверхъ, слѣдуетъ взять со знакомъ минусъ. Сумма всѣхъ импульсовъ будетъ:

$$dt\,(p_0\Omega_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0 - p_1\Omega_1\,\mathrm{Cos}\,\alpha_1 + P - X).$$

Уравнивая ее выраженію (46), найденному для пріобрѣтеннаго Количества Движенія, и сокращая dt, найдемъ:

$$Q.\frac{\triangle}{g}(V_1\mathrm{Cos}\,\alpha_1 - V_0\mathrm{Cos}\,\alpha_0) = p_0\Omega_0\mathrm{Cos}\,\alpha_0 - p_1\Omega_1\mathrm{Cos}\,\alpha_1 + P - X.$$

Отсюда получаемъ искомую реакцію X:

$$X = p_0\Omega_0\mathrm{Cos}\,\alpha_0 - p_1\Omega_1\mathrm{Cos}\,\alpha_1 + P + Q.\frac{\triangle}{g}(V_0\mathrm{Cos}\,\alpha_0 - V_1\,\mathrm{Cos}\,\alpha_1).$$

Это реакція опоры на сосудъ; обратное ей давленіе сосуда на опору будетъ имѣть то же численное значеніе, но противуположное направленіе.

Въ этомъ выраженіи первые три члена

$$p_0\Omega_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0,\ p_1\Omega_1\,\mathrm{Cos}\,\alpha_1, P$$

представляютъ статическую часть давленія, т. е. то давленіе на опору, которое получилось бы, если бы жидкость, наполняющая сосудъ, не двигалась.

Послѣдній членъ, т. е.

$$Q.\frac{\triangle}{g}(V_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0 - V_1\,\mathrm{Cos}\,\alpha_1), \quad \ldots\ldots\ (47),$$

изображаетъ прибавочное давленіе, происходящее отъ движенія жидкости въ сосудѣ; это динамическое давленіе. Оно можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по величинѣ вертикальныхъ проекцій скоростей

$$V_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0,\ V_1\,\mathrm{Cos}\,\alpha_1.$$

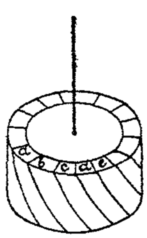
Если эти проекціи одинаковы, то динамическое давленіе обращается въ нуль.

Мы разсматривали вертикальное давленіе, но совершенно тѣмъ же путемъ могли бы найти и горизонтальное давленіе нашего сосуда на опору. Динамическая часть этого давленія будетъ очевидно:

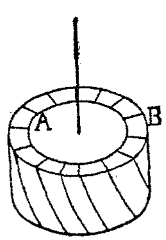
$$Q.\frac{\triangle}{g}(V_0 \mathrm{Sin}\,\alpha_0 - V_1 \mathrm{Sin}\,\alpha_1).$$

131. Эту задачу можно примѣнять къ различнымъ практическимъ вопросамъ. Напримѣръ нашъ сосудъ можетъ представлять трубу, по которой ведутъ воду для водопровода или для водянаго колеса. Такія трубы часто приходится проводить по уклону горы, онѣ прикрѣпляются къ опорамъ, расположеннымъ на скатѣ *). Уравненія наши можно примѣнять или ко всей трубѣ или къ любой ея части.

132. *Примѣненіе къ осевымъ турбинамъ.* Мы считали что нашъ сосудъ неподвиженъ. Теперь предположимъ, что онъ вращается около вертикальной оси. Если кромѣ того назначимъ, что сосудъ не одинъ, а ихъ нѣсколько a, b, c, d, расположенныхъ кольцеобразно около оси вращенія (фиг. 116), то получимъ осевую турбину. Первоначальная идея такого водянаго двигателя принадлежитъ Эйлеру; онъ же первый рѣшилъ вопросъ о динамическомъ давленіи, производимомъ текущей водой.



Фиг. 116.



Фиг. 117.

Мы можемъ примѣнить выраженіе (47) къ опредѣленію величины динамическаго давленія производимаго на ось турбины, вслѣдствіе движенія воды по лопаткамъ. Чтобы убѣдиться, что такое примѣненіе этой формулы вполнѣ правильно, замѣтимъ слѣдующее: такъ какъ теперь нашъ сосудъ не неподвижный, а вращается, то нужно ввести силы инерціи, а именно въ случаѣ равномѣрнаго вращенія, нужно прибавить двѣ силы инерціи: a) центробѣжную, и b) Коріолисову силу. Но обѣ эти силы пер-

*) Кромѣ выведеннаго динамическаго давленія, на трубу могутъ дѣйствовать удары, происходящіе отъ болѣе или менѣе быстраго закрыванія щитовъ, регулирующихъ теченіе воды по трубѣ. Дѣйствіе такихъ ударовъ на опоры и на болты, прикрѣпляющіе трубу, можетъ значительно превышать динамическое давленіе (47).

пендикулярны къ оси вращенія. Слѣд. онѣ не измѣнятъ величину вертикальнаго давленія, и формула (47) можетъ быть примѣняема для осевыхъ турбинъ.

Но теперь величины V_0, V_1 будутъ изображать скорости относительнаго движенія воды въ турбинѣ *).

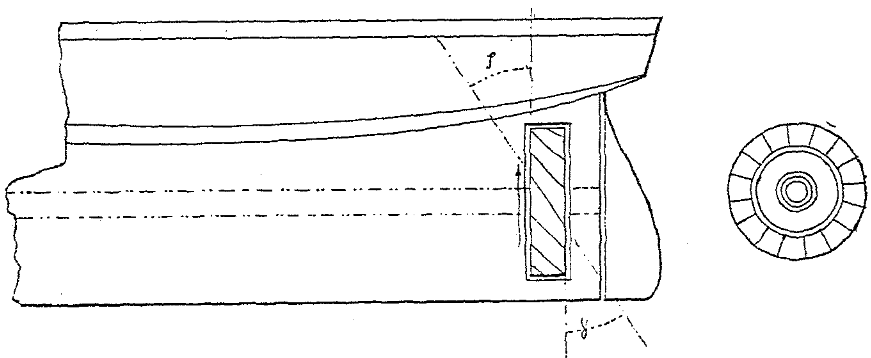
133. Изъ числа осевыхъ турбинъ всего больше примѣнялась турбина Жонваля, въ которой вода движется въ промежуткѣ между двумя концентрическими цилиндрами A и B (фиг. 117), совершенно наполняя все кольцо, заключающееся между ними. Горизонтальное сѣченіе этого кольца одинаково какъ вверху, т. е. при входѣ на турбину, такъ и внизу, т. е. при выходѣ воды изъ турбины. Отсюда слѣдуетъ, что вертикальныя проекціи скорости воды при входѣ и при выходѣ одинаковы. Т. е. мы здѣсь имѣемъ равенство величинъ

$$V_0 \mathrm{Cos}\ \alpha_0 \text{ и } V_1 \mathrm{Cos}\ \alpha_1;$$

слѣд. динамическое давленіе на ось турбины равно нулю. Это необходимое слѣдствіе равенства сѣченій при входѣ и при выходѣ.

134. ***Турбинное колесо какъ замѣна гребнаго винта пароходовъ.*** Такая замѣна предлагалась неоднократно. Мы разберемъ предложеніе, сдѣланное Редтенбахеромъ.

На фиг. 118 скопированъ турбинный двигатель Редтенба-



Фиг. 118.

хера **), расположенный за кормой парохода, точно такъ, какъ располагается гребной винтъ. Пароходная машина вращаетъ валъ трубины; вслѣдствіе движенія воды по винтовымъ лопат-

*) Осевыя проекціи ихъ одинаковы съ такими же проекціями абсолютныхъ скоростей.

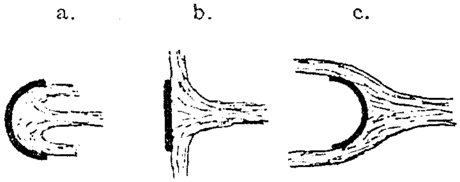
**) Взято изъ сочиненія Редтенбахера. Der Maschinenbau, III Band. Tafel XVII. Fig. 11, 12.

камъ турбиннаго колеса, должно получиться осевое давленіе. Это и будетъ движущая сила; ось, упираясь въ корпусѣ парохода (въ упорный подпятникъ), будетъ приводить судно въ движеніе.

Глядя на эту фигуру, мы видимъ, что имѣемъ дѣло съ настоящей турбиной Жонваля, имѣющей горизонтальную ось. Площади отверстій входа и выхода воды равны между собою. Слѣдовательно осевое давленіе, производимое водой, правильно движущейся по турбинному колесу и заполняющей все пространство между лопатками, будетъ равно нулю. Т. е. этотъ двигатель вовсе не можетъ дѣйствовать; ожиданіе, что онъ вызоветъ осевое давленіе на корпусъ парохода, ошибочно.

Эта ошибка знаменитаго профессора очень поучительна. Редтенбахеръ не только ожидалъ, что здѣсь получится осевое давленіе, но онъ выводитъ математическое выраженіе для величины этого давленія. Выводъ его заключается въ нахожденіи тѣхъ элементарныхъ давленій, которыя производятъ движущіяся струи воды на лопатки турбины, и въ суммированіи осевыхъ слагающихъ этихъ давленій. Мы уже указывали на то, что опредѣленія такихъ давленій представляютъ сложную задачу, при рѣшеніи которой легко впасть въ ошибку; это и случилось съ Редтенбахеромъ. Между тѣмъ, примѣняя законъ Количествъ Движенія, мы совершенно избавляемся отъ надобности разсматривать эти давленія; вмѣсто сложныхъ выкладокъ, получаемъ простое и почти непосредственно очевидное рѣшеніе и вполнѣ гарантированы отъ ошибки.

135. Въ заключеніе замѣтимъ, что вопросы о величинѣ давленій, производимыхъ водою въ случаяхъ, которые изображены на фиг. 110—113, рѣшаются буквально такъ же, какъ это сдѣлано въ n° 129—130.



Фиг. 119.

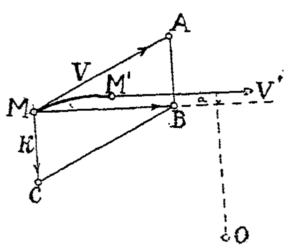
Примѣняя Законъ Количествъ Движенія, мы сразу можемъ предсказать, что для трехъ случаевъ, представленныхъ на фиг. 119, давленіе воды на лопатку въ случаѣ *a* будетъ наименьшее, а въ случаѣ c—наибольшее.

ДЕСЯТАЯ БЕСѢДА.

Общіе законы Динамики. Законъ Моментовъ Количествъ Движенія.

136. *Законъ моментовъ количествъ движенія.* Мы уже говорили (n⁰ 115), что однимъ изъ пріемовъ для полученія этого закона можетъ служить принципъ отвердѣнія. Нужно написать, что сумма моментовъ внѣшнихъ силъ и силъ инерціи для любой оси равна нулю. Выбирая за ось моментовъ поочередно каждую изъ трехъ координатныхъ осей, мы получимъ три уравненія, разборъ которыхъ и приведетъ къ закону, составляющему предметъ этой бесѣды. Вмѣсто этого мы предпочитаемъ нижеслѣдующій пріемъ вывода, въ которомъ постепенно переходимъ отъ простѣйшихъ случаевъ къ болѣе сложнымъ.

Начнемъ съ плоскаго движенія одной матеріальной точки. Возьмемъ (фиг. 120) два безконечно близкихъ положенія этой точки M и M′, т. е. путь, проходимый въ теченіи безконечно малаго времени $\triangle t$, и замѣтимъ скорости въ этихъ положеніяхъ V и V′. Скорость V′ можно съ геометрической точки зрѣнія разсматривать какъ проистекшую изъ скорости V, которая получила нѣкоторую прибавку. Для этого, проведя черезъ M линіи MA и MB, равныя и параллельныя скоростямъ V и V′, построимъ параллелограммъ MABC, имѣющій своей діагональю V′. Составленный такимъ образомъ чертежъ показываетъ, что скорость V′ есть результатъ геометрическаго сложенія скорости V и прибавки MC. Величина MC называется измѣненіемъ скорости; ее назовемъ буквою K.



Фиг. 120.

Извѣстно, что величиной ускоренія движенія въ точкѣ M называется предѣлъ дроби

$$\frac{K}{\triangle t},$$

получающійся съ уменьшеніемъ $\triangle t$ до нуля, т. е. съ приближеніемъ M' къ M. Направленіемъ ускоренія въ точкѣ M называется предѣлъ направленія стороны MC нашего параллелограмма.

Выберемъ въ плоскости движенія нѣкоторую постоянную точку O и будемъ искать моменты различныхъ отрѣзковъ относительно O. Понятіе о моментѣ силы всѣмъ извѣстно, но это понятіе можно распространить и на любые другіе прямолинейные отрѣзки, напр., на скорости; моментъ ихъ опредѣляется и находится совершенно такъ же, какъ это дѣлается, когда отрѣзокъ изображаетъ силу.

Для параллелограмма силъ имѣемъ, что моментъ равнодѣйствующей (т. е. діагонали) равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ (т. е. сторонъ параллелограмма). Теорема эта, принадлежащая Вариньону, представляетъ чисто геометрическое соотношеніе, нисколько не связана съ понятіемъ о силѣ, и справедлива для всякаго параллелограмма, что бы ни представляли его стороны. Поэтому мы можемъ примѣнить ее и къ нашему параллелограмму скоростей $MABC$.

Получимъ:

$$\text{моментъ } V' = \text{моменту } V + \text{моментъ } K$$

или

$$\text{моментъ } K = \text{моменту } V' - \text{моменту } V.$$

Въ этомъ выводѣ входитъ моментъ діагонали $MB = V'$, т. е. скорости V', проведенной черезъ точку M. Но здѣсь можно произвести замѣну и вмѣсто момента отрѣзка MB вставить отрѣзокъ $M'V'$, т. е. скорость V', проведенную черезъ точку M'.

При такой замѣнѣ, плечо момента относительно O измѣнится на величину разстоянія между MB и $M'V'$, т. е. на длину a, которая есть величина второго порядка. Это слѣдуетъ изъ того, что какъ хорда MM', такъ и уголъ между этой хордою и MB представляютъ безконечно малыя величины. Но безконечно малую величину 2-го порядка мы можемъ отбросить при самомъ началѣ вывода и сохранить только члены перваго порядка.

Итакъ въ нашемъ послѣднемъ уравненіи можно допустить, что при нахожденіи момента скорость V' считается приложенной къ точкѣ M', а скорость V въ точкѣ M.

Умножимъ обѣ части послѣдняго уравненія на массу m движущейся точки; получимъ:

$$\text{моментъ } (mK) = \text{моменту } (mV') - \text{моментъ } (mV).$$

Произведенія mV' и mV представляютъ количества движенія массы m въ положеніяхъ M и M'. У насъ входятъ во второй части моменты этихъ количествъ движенія. Разность ихъ представляетъ приращеніе момента количества движенія, происходящее при переходѣ движущейся точки изъ M въ M'.

Самое количество движенія обозначимъ буквою μ, а приращеніе его—знакомъ $\Delta\mu$. Затѣмъ, дѣля обѣ части равенства на Δt и переходя къ предѣлу, получаемъ:

предѣлъ момента (mK) дѣленнаго на Δt равенъ предѣлу частнаго $\frac{\Delta\mu}{\Delta t}$.

Но въ предѣлѣ отношеніе K къ Δt обращается въ ускореніе, а произведеніе массы на ускореніе есть сила. Слѣд. лѣвая часть уравненія будетъ моментъ силы, дѣйствующей на массу m. Для обозначенія его примѣнимъ букву M. Находящійся въ правой части

$$\text{предѣлъ } \frac{\Delta\mu}{\Delta t}$$

будетъ производная по времени отъ μ, т. е. отъ момента количества движенія. И такъ получаемъ для плоскаго движенія одной точки уравненіе:

$$M = \frac{d\mu}{dt}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (48),$$

которое выражаетъ теорему:

для каждаго положенія матеріальной точки моментъ силы равенъ производной по времени отъ момента количества движенія.

137. Теперь немного усложнимъ вопросъ; пусть движеніе не плоское. Тогда его можно проектировать на координатныя плоскости и разсматривать каждую изъ проекцій отдѣльно. Конечно и сила также должна быть проектирована на эти плоскости. На каждой координатной плоскости получимъ плоское движеніе; будемъ брать моменты относительно начала координатъ, или, другими словами, относительно оси, перпендикулярной къ плоскости проектированія; напр., если проектируемъ на плоскость XY, то моменты будемъ брать относительно оси Z. Всѣ предъидущіе выводы можно примѣнить къ такой проекціи движенія, и мы по прежнему получимъ уравненіе:

$$M = \frac{d\mu}{dt} . \; . \; . \; . \; . \; . \; (48).$$

Затѣмъ дѣлаемъ дальнѣйшее усложненіе; отъ матеріальной точки переходимъ къ системѣ, т. е. къ совокупности матеріальныхъ точекъ. Введемъ внутреннія силы; тогда каждую матеріальную точку можно считать свободной и примѣнять къ ней уравненіе (48), если движенія всѣхъ точекъ проектируются на одну и ту же неподвижную плоскость. Напишемъ для всѣхъ точекъ системы такія уравненія и сложимъ ихъ. По обыкновенію означая суммированіе знакомъ Σ, получимъ:

$$\Sigma M = \Sigma \frac{d\mu}{dt}.$$

Во второй части можно сумму производныхъ замѣнить производной отъ суммы, слѣд. будетъ:

$$\Sigma M = \frac{d}{dt}(\Sigma\mu) \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

Это уравненіе выражаетъ для любой системы слѣдующую теорему, или законъ моментовъ количества движенія:

Въ каждое мгновеніе сумма моментовъ внѣшнихъ силъ относительно нѣкоторой оси равна производной по времени отъ момента количествъ движенія, взятаго для той же оси.

139. ***Разъясненіе этого закона.*** Уравненіе (49) содержитъ во второй своей части производныя отъ скоростей по времени, слѣдовательно, по отношенію къ координатамъ, это будетъ дифференціальное уравненіе второго порядка. Такого порядка всегда оказываются уравненія движенія, получающіяся отъ примѣненія Даламберова начала. Слѣд. наше уравненіе (49) пока не есть интегралъ уравненій движенія; это только модель, простая картина движенія. Но оно во многихъ случаяхъ можетъ быть проинтегрировано, а именно всегда, если сумма моментовъ

$$\Sigma M$$

есть явная функція времени. Тогда мы получаемъ интегралъ уравненій движенія, т. е. уравненіе, содержащее въ себѣ скорости.

Интегралъ получается также для двухъ простѣйшихъ случаевъ: a) если ΣM величина постоянная; b) если $\Sigma M = 0$. Въ послѣднемъ случаѣ получится

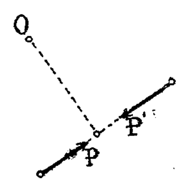
$$\frac{d}{dt}(\Sigma\mu) = 0,$$

т. е.

$$\Sigma\mu = \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

т. е. сумма моментовъ количествъ движенія для всей системы есть величина постоянная; она не измѣняется и во все время движенія сохраняетъ свою начальную величину. Въ этомъ случаѣ, т. е. для изолированной системы получается Законъ Сохраненія Моментовъ Количествъ Движенія, аналогичный Закону Сохраненія Количествъ Движенія.

140. ***Какія неизвѣстныя исключаются при составленіи уравненія моментовъ количествъ движенія.*** Прежде всего видно, что внутреннія силы системы, подчиненныя закону равенства между дѣйствіемъ и противудѣйствіемъ, всѣ исключаются. Въ самомъ дѣлѣ, двѣ равныя и противуположныя силы P, P[1] (фиг. 121) для любой оси O даютъ моменты, которые численно равны, а знаки имѣютъ противуположные; слѣд. эти моменты сокращаются при составленіи суммы моментовъ силъ. Итакъ въ уравн. (49) остаются только внѣшнія силы. Такое полное исключеніе внутреннихъ силъ составляетъ значительное упрощеніе.



Фиг. 121.

Но и нѣкоторыя внѣшнія силы могутъ исключаться изъ уравненія (49), если ихъ моменты будутъ нулями. Это получится для всѣхъ силъ, параллельныхъ оси, а также для всѣхъ силъ, пересѣкающихъ ось. Но выборъ оси вполнѣ зависитъ отъ насъ; уравненіе справедливо для всякой оси. Во многихъ случаяхъ удачнымъ выборомъ оси можно достигнуть исключенія значительнаго числа внѣшнихъ силъ, чѣмъ уравненіе значительно упрощается.

Для примѣра укажемъ на водяныя турбины. Разбирая движеніе ихъ помощію Закона Моментовъ Количествъ Движенія, мы исключаемъ слѣдующія силы: a) Всѣ внутреннія силы, т. е. взаимныя давленія внутри жидкости, а также давленія между жидкостью и вращающимся колесомъ. b) Если за ось моментовъ возьмемъ ось турбины, то исключаемъ реакціи опоръ этой оси; если она вертикальна, то исключаются вѣсъ воды и самаго колеса. Такое же исключеніе вѣса происходитъ обыкновенно, вслѣдствіе симметріи расположенія и въ турбинахъ, вращающихся около горизонтальной оси.

Изъ этого слѣдуетъ, что Законъ Моментовъ Количествъ Движенія есть теорема наиболѣе удобная для рѣшенія вопроса о движеніи турбинъ *).

*) Въ одной изъ новѣйшихъ работъ по турбинамъ (Prasil. Vergleichende

141. ***Моментъ силъ инерціи.*** По Даламберову Началу внѣшнія силы уравновѣшиваются съ силами инерціи. Посмотримъ на уравн. (49) съ этой точки зрѣнія. Въ лѣвой части его имѣется моментъ внѣшнихъ силъ для нѣкоторой оси, слѣд. величина, стоящая въ правой части

$$\frac{d}{dt}(\Sigma\mu),$$

взятая со знакомъ минусъ, представляетъ моментъ силъ инерціи относительно той же оси.

150. ***Сколько уравненій даетъ законъ моментовъ количествъ движенія?*** Уравненіе (49) можно примѣнять для любой неподвижной оси, т. е. перемѣняя эти оси, можно получить сколько угодно такихъ уравненій. Подобно этому и уравненіе количествъ движенія можно примѣнять къ любому направленію, къ проекціи движенія на всякую ось. Выберемъ три координатныя оси и напишемъ для нихъ какъ уравненія количества движенія, такъ и уравненія моментовъ количествъ движенія; получимъ шесть уравненій. Легко убѣдиться въ томъ, что дальнѣйшей перемѣной осей мы получимъ уравненія, которыя представляютъ слѣдствія прежнихъ шести уравненій, слѣд. не получимъ ничего новаго. Для этого вспомнимъ, что наши уравненія получаются изъ принципа отвердѣнія и представляютъ условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. А для равновѣсія твердаго тѣла необходимо и достаточно выполненіе шести уравненій равновѣсія. Всѣ остальныя условія равновѣсія, какъ

Untersuchungen an Reactions-Niederdruckturbinen), я встрѣтилъ, по поводу исключенія внутреннихъ силъ неправильное толкованіе, которое нельзя оставить безъ опроверженія. Авторъ полагаетъ, что полное исключеніе внутреннихъ силъ произойдетъ только въ томъ случаѣ, когда каналы турбины совершенно заполнены водою. Если же это условіе не выполнено, то взаимное уравновѣшеніе внутреннихъ давленій жидкости, по его мнѣнію, можетъ и не произойти, такъ какъ тогда, „вслѣдствіе разныхъ причинъ, отъ свободной поверхности жидкости, движущейся въ колесѣ турбины, могутъ отдѣляться частицы, которыя оказываются внѣ связи съ остальной жидкостью. Поэтому, для активныхъ турбинъ съ вентиляціей примѣненіе указанной теоремы ограничено“.

Съ этимъ конечно нельзя согласиться; всѣ внутреннія силы исключаются какъ въ случаѣ, когда вода течетъ сплошной струей, такъ и при условіяхъ, когда жидкость разбивается на отдѣльныя капли. Но при разбиваніи на капли является затрудненіе въ вычисленіи Момента Количествъ Движенія, такъ какъ отдѣльныя частицы имѣютъ различныя скорости, величины и направленія которыхъ трудно опредѣлимы.

проекціи на любую ось, такъ и моменты для любой оси, будутъ слѣдствія этихъ шести и не дадутъ ничего новаго.

И такъ наши законы: количествъ движенія и моментовъ количествъ движенія—даютъ намъ только шесть уравненій. Когда возможно интегрированіе, т. е. если сумма проекцій внѣшнихъ силъ и сумма ихъ моментовъ заданы какъ функціи времени, то мы помощью этихъ двухъ законовъ можемъ получить не болѣе шести интеграловъ уравненій движенія.

151. ***Приложенія. Моментъ количествъ движенія для твердаго тѣла, вращающагося около неподвижной оси.*** Чтобы дать болѣе опредѣленное представленіе о новомъ введенномъ нами понятіи „моментъ количествъ движенія“, вычислимъ этотъ моментъ для твердаго тѣла, вращающагося около неподвижной оси; эту ось и примемъ за ось моментовъ. Каждая частица тѣла движется въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси O. Пусть угловая скорость вращенія будетъ ω. Возьмемъ нѣкоторую частицу тѣла, находящуюся на разстояніи r отъ оси и имѣющую массу m. Скорость ея будетъ

$$\omega r;$$

она направлена по перпендикуляру къ радіусу r. Количество движенія имѣетъ величину

$$\omega . mr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51),$$

а направленіе его совпадаетъ съ направленіемъ скорости. Моментъ этого количества движенія относительно оси O получится, умножая величину (51) на радіусъ r, что составитъ

$$\omega . mr^2.$$

Суммируя эти величины для всѣхъ частицъ тѣла, получимъ моментъ количества движенія всего тѣла

$$\mu = \Sigma \omega . mr^2$$

или, по вынесеніи за знакъ суммы множится ω, общаго для всѣхъ членовъ суммы, имѣемъ:

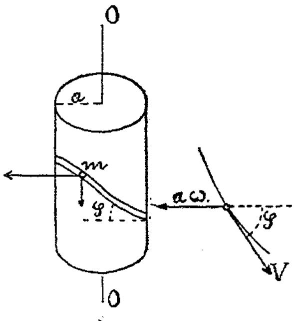
$$\mu = \omega . \Sigma mr^2.$$

Но сумма

$$\Sigma mr^2$$

есть ничто иное, какъ моментъ инерціи тѣла относительно оси O. Слѣд. в ъ с л у ч а ѣ в р а щ е н і я т в е р д а г о т ѣ л а о к о л о н е п о д в и ж н о й о с и, м о м е н т ъ к о л и ч е с т в ъ д в и ж е н і я р а в е н ъ п р о и з в е д е н і ю и з ъ у г л о в о й с к о р о с т и н а м о м е н т ъ и н е р ц і и т ѣ л а д л я о с и в р а щ е н і я.

152. *Примѣръ*. Цилиндръ, который можетъ вращаться около вертикальной оси OO (фиг. 123), имѣетъ на поверхности винтовой желобокъ; въ него вложенъ маленькій шарикъ m. Найти движеніе этой системы подъ дѣйствіемъ силы тяжести (и при отсутствіи вредныхъ сопротивленій).



Фиг. 123.

Эта система имѣетъ двѣ степени свободы. Движеніе ея состоитъ въ томъ, что шарикъ опускается по желобку, со скоростью V, а цилиндръ получитъ вращеніе около оси съ угловой скоростью ω. Имѣемъ двѣ неизвѣстныя V, ω, которыя нужно найти.

Назовемъ уголъ наклона винтовой линіи черезъ φ, радіусъ цилиндра черезъ a, его моментъ инерціи относительно оси OO черезъ A.

Примѣнимъ законъ моментовъ количествъ движенія относительно оси OO. Всѣ внутреннія силы, напр. давленіе между шарикомъ и желобкомъ, исключаются. Реакціи опоръ оси также исключаются. Никакихъ внѣшнихъ силъ, кромѣ тяжести, не дѣйствуетъ. Но тяжесть исключается изъ нашего уравненія, потому что она параллельна той оси, для которой берутся моменты. И такъ всѣ силы исключены. Слѣд. получается сохраненіе первоначальной величины момента количествъ движенія. Пусть въ началѣ нашъ приборъ былъ въ покоѣ, то есть начальная величина момента количествъ движенія была равна нулю. Такое же значеніе долженъ сохранить моментъ количествъ движенія и далѣе, во все время движенія. Выразимъ это условіе уравненіемъ.

Моментъ количествъ движенія цилиндра будетъ:

$$\omega . \mathrm{A}.$$

Что касается шарика, имѣющаго массу m, то онъ обладаетъ скоростью V вдоль желобка и кромѣ того скоростью $a\omega$, такъ какъ участвуетъ во вращеніи цилиндра. Горизонтальная скорость шарика будетъ

$$\omega . a — \mathrm{V} . \mathrm{Cos}\ \varphi;$$

на вертикальную скорость его не обращаемъ вниманія, такъ какъ она параллельна оси OO и даетъ моментъ, равный нулю.

Моментъ количества движенія, отвѣчающаго горизонтальной скорости, будетъ

$$a . \mathrm{m} . (\omega a — \mathrm{V} . \mathrm{Cos}\ \varphi).$$

Складывая его съ моментомъ количества движенія цилиндра и приравнивая сумму ихъ нулю, получимъ:

$$\omega (A + ma^2) - am V . \mathrm{Cos}\, \varphi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (52).$$

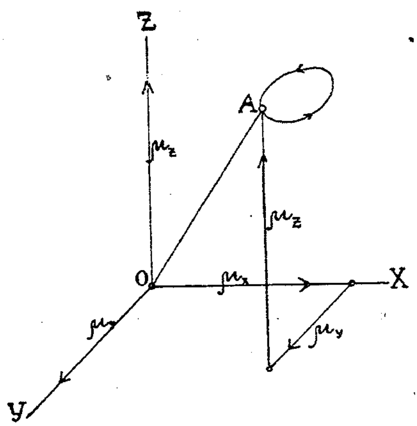
Вотъ одно изъ уравненій для нахожденія неизвѣстныхъ ω,V. Чтобы получить другое уравненіе, нужно обратиться къ закону живыхъ силъ. Мы докончимъ этотъ примѣръ въ 13-ой бесѣдѣ.

153. *Другая форма Закона Моментовъ Количествъ Движенія.* Эта форма прежде называлась теоремой Резаля; но потомъ оказалось, что она была найдена значительно раньше Резаля англійскимъ математикомъ Гэйуордъ. Во многихъ случаяхъ очень удобно примѣнять Законъ Моментовъ Количествъ Движенія именно въ этой формѣ, которая даетъ очень простую и поучительную картину движенія.

Для полученія такой формы замѣтимъ, что моментъ количествъ движенія, какъ всякій моментъ, взятый относительно оси, есть величина векторіальная. Подобно тому какъ въ Статикѣ моментъ силы относительно нѣкоторой оси X откладывается въ видѣ отрѣзка по оси X, такъ же будемъ поступать и съ моментами количествъ движенія. Величины этихъ моментовъ относительно трехъ координатныхъ осей обозначимъ

$$\mu_x,\ \mu_y,\ \mu_z$$

и будемъ откладывать ихъ по осямъ X, Y, Z (фиг. 124). Результатъ геометрическаго сложенія этихъ трехъ величинъ представится на чертежѣ векторомъ OA, имѣющимъ извѣстное направленіе и величину; мы его будемъ называть полной величиной момента количествъ движенія системы, или, еще лучше, осью моментовъ количествъ движенія, а также векторомъ моментовъ количествъ движенія. Начало этого вектора всегда совпадаетъ съ началомъ координатъ; конецъ его, или иначе конецъ оси, т. е. точку A, будемъ называть полюсомъ.



Фиг. 124.

При движеніи системы, векторъ OA, вообще говоря, измѣняетъ съ теченіемъ времени свое направленіе и величину, а поэтому полюсъ A движется. Разсмотримъ движеніе полюса. Съ этой цѣлью напишемъ уравненія моментовъ количествъ движенія для трехъ координатныхъ осей. Называя суммы моментовъ внѣшнихъ силъ относительно осей X, Y, Z черезъ

$$M_x,\ M_y,\ M_z,$$

получимъ эти уравненія

$$\left.\begin{aligned} Mx &= \frac{d\mu_x}{dt} \\ My &= \frac{d\mu_y}{dt} \\ Mz &= \frac{d\mu_z}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (53).$$

Говоря о движеніи полюса A, мы имѣемъ, что

$$\mu_x,\ \mu_y,\ \mu_z$$

представляютъ координаты этой движущейся точки. Производныя этихъ координатъ

$$\frac{d\mu_x}{dt},\ \frac{d\mu_y}{dt},\ \frac{d\mu_z}{dt}$$

изображаютъ скорости движенія полюса по направленію трехъ координатныхъ осей. Уравненія (53) могутъ быть прочитаны слѣдующимъ образомъ:

скорости полюса по координатнымъ осямъ равны соотвѣтствующимъ моментамъ внѣшнихъ силъ.

Если мы будемъ разсматривать не проекціи моментовъ силъ

$$Mx,\ My,\ Mz,$$

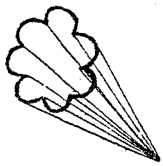
а полный моментъ силъ, т. е. геометрическую сумму этихъ проекцій, то можетъ истолковать уравненія (53) въ формѣ слѣдующей теоремы:

скорость полюса для каждаго мгновенія равна по величинѣ и совпадаетъ по направленію съ полнымъ моментомъ внѣшнихъ силъ.

Въ этомъ и состоитъ теорема Гэйуордъ-Резаля. Оказывается, что скорость полюса и полный моментъ внѣшнихъ силъ тождественны. Зная, какъ измѣняется моментъ силъ, имѣя картину этого измѣненія, мы буквально примѣняемъ ту же картину къ движенію полюса, предсказываемъ это движеніе. И обратно, зная движеніе полюса, найдя скорость этого движенія, мы предсказываемъ величину и направленіе полнаго момента внѣшнихъ силъ.

154. Слѣдуетъ обратить вниманіе на эту картину движенія и вдуматься въ полученную теорему. Возьмемъ для сравненія движеніе матеріальной точки, масса которой равна единицѣ. Оно зависитъ отъ силы, дѣйствующей на точку, а у насъ движеніе полюса зависитъ отъ момента силъ. Но особенное различіе заключается въ томъ, что при движеніи матеріальной точки величина силы и ея проекцій даетъ величину ускоренія движенія (или его проекцій). Между тѣмъ при движеніи полюса величина момента даетъ не ускореніе, а скорость полюса; моменты силъ равны скоростямъ полюса. Когда моментъ силъ равенъ нулю, то и скорость полюса равна нулю. Когда моментъ силъ постоянный, то и скорость полюса постоянная. Т. е. мы имѣемъ здѣсь движеніе безъ инерціи; съ прекращеніемъ силъ, сейчасъ же прекращается и движеніе полюса. Чтобы поддерживать это движеніе, необходимо постоянное дѣйствіе силъ. Въ этомъ состоитъ глубокое отличіе движенія полюса отъ движенія матеріальной точки. Полюсъ не владѣетъ способностью сохранять свою скорость послѣ прекращенія силы. Можно сказать, что сила (или, точнѣе, моментъ силъ) держитъ полюсъ въ уздѣ, не позволяетъ ему ни разбѣгаться, ни отставать. Полюсъ принужденъ въ точности повторять измѣненія силы; его скорость точно отражаетъ или копируетъ эти измѣненія. Представимъ себѣ, что мы нарисовали чертежъ, или діаграмму, изображающую послѣдовательныя величины и направленія момента силъ; эта самая картнна будетъ изображать послѣдовательныя величины и направленія скорости полюса. Положимъ, что мы разбираемъ, изслѣдуемъ какой нибудь сложный случай движенія. Дѣлаемъ нѣкоторое предположеніе, догадку, относительно этого движенія, и желаемъ провѣрить правильность этой догадки. Для этого опредѣлимъ движеніе полюса; если оно не вполнѣ согласуется съ измѣненіемъ момента силъ, то наша догадка невѣрна. Наоборотъ согласіе момента силъ со скоростями полюса есть успокоительный результатъ. Этимъ пріемомъ можно пользоваться при разборѣ сложныхъ явленій, напр. движенія жироскоповъ и т. п. Таковъ смыслъ теоремы Гейуордъ-Резаля.

Не слѣдуетъ удивляться тому, что мы имѣемъ здѣсь движеніе безъ инерціи. Полюсъ не есть матеріальная точка, снаб-


Фиг. 125.

женная массой; онъ изображаетъ только отвлеченное представленіе, а теорема Гэйуордъ-Резаля даетъ геометрическое описаніе явленій движенія системы. Законъ инерціи не имѣетъ сюда никакого отношенія. Поэтому напр. полюсъ можетъ описывать кривыя съ точками возврата (фиг. 125), что недопустимо для движенія матеріальной точки.

155. *Устойчивость движенія полюса.* Скорость полюса появляется и исчезаетъ вмѣстѣ съ появленіемъ и исчезновеніемъ силъ, и величина этой скорости пропорціональна этимъ силамъ (точнѣе ихъ моментамъ). Перемѣщенія же опредѣляются скоростями и временемъ. Поэтому удары и другія такъ называемыя мгновенныя силы, т. е. силы,дѣйствующія въ теченіи очень короткаго времени, могутъ только очень мало измѣнить движеніе полюса. Другими словами,это движеніе владѣетъ свойствомъ устойчивости: оно мало измѣняется отъ дѣйствія случайныхъ силъ ударовъ, сотрясеній. Но эта устойчивость отличается отъ всѣмъ извѣстной устойчивости при равновѣсіи. Когда тѣло, находящееся въ устойчивомъ равновѣсіи, получитъ ударъ или толчокъ, то оно начинаетъ колебаться взадъ и впередъ около равновѣснаго положенія: колебанія эти могутъ продолжаться довольно долго послѣ прекращенія толчка. На движеніе же полюса толчокъ оказываетъ вліяніе только въ теченіи короткаго времени своего дѣйствія, и колебаній не получается; какъ только прекратится толчокъ, сейчасъ же прекращается и его вліяніе; остающихся явленій, колебаній, представляющихъ какъ бы воспоминаніе о полученномъ толчкѣ, полюсъ не показываетъ.

Нужно привыкнуть къ этимъ особенностямъ движенія полюса, которыя кажутся парадоксами, потому что на движеніе полюса часто ошибочно смотрятъ какъ на движеніе матеріальной точки. Отъ такого неправильнаго взгляда происходитъ кажущаяся парадоксальность движеній волчка, жироскопа и т. п. приборовъ; они какъ будто бы нарушаютъ всѣ законы Динамики.

ОДИННАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

Приложенія Закона Моментовъ Количествъ Движенія. Волчки, жироскопы.

156. Движеніе твердаго тѣла, имѣющаго одну неподвижную точку. Этотъ случай движенія представляетъ поучительный примѣръ приложенія Закона Моментовъ Количествъ Движенія. Всѣ сложныя и разнообразныя явленія такого движенія хорошо уясняются и освѣщаются нашимъ Закономъ.

157. Предварительно напомнимъ основную теорему касательно движенія твердаго тѣла, которое имѣетъ неподвижную точку:

Всякое безконечно малое движеніе такого тѣла есть непремѣнно вращеніе около мгновенной оси. Эта ось непрерывно измѣняетъ свое положеніе какъ въ тѣлѣ, такъ и въ пространствѣ.

Теорема эта можетъ быть разсматриваема какъ обобщеніе теоремы Шаля, относящейся къ плоскому движенію. Здѣсь мы имѣемъ движеніе не плоское; одна точка тѣла неподвижна, и всякая другая точка должна во все время движенія не измѣнять свое разстояніе отъ неподвижной, слѣд. должна оставаться на поверхности шара, имѣющаго центромъ неподвижную точку. И такъ здѣсь движеніе не плоское, а сферическое. Вообразимъ на поверхности указаннаго шара любую фигуру и примѣнимъ къ ней буквально всѣ тѣ разсужденія, которыя мы излагали въ n^0 42 для плоскаго движенія; получимъ то обобщеніе, которое мы только что высказали.

158. Безконечно малое вращеніе около мгновенной оси всегда можно разложить на три вращенія около трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей. Угловая скорость при этомъ замѣняется тремя составляющими угловыми скоростями, совершенно такъ, какъ нѣкоторая сила замѣняется тремя составляющими силами.

159. *Главныя оси.* Мы уже объяснили (см. n° 82 и въ прибавленіи къ этой бесѣдѣ) понятіе о главной оси твердаго тѣла. Проведя въ немъ три координатныя оси X, Y, Z, составимъ произведенія изъ массы частицы тѣла m на двѣ ея координаты

$$mxz, \; myz;$$

затѣмъ сложимъ такія выраженія для всѣхъ частицъ тѣла. Получатся суммы

$$\Sigma mxz, \; \Sigma myz.$$

Если обѣ эти суммы равны нулю, то ось Z называется главною осью тѣла для начала координатъ. Таково опредѣленіе.

Главныя оси владѣютъ замѣчательными свойствами. Мы видѣли, что при вращеніи около главной оси центробѣжныя силы взаимно уравновѣшиваются, т. е. не требуютъ никакой дополнительной силы для своего уравновѣшиванія. Вслѣдствіе этого центробѣжныя силы не производятъ давленія на опоры оси.

Касательныя силы инерціи при вращеніи около главной оси тоже не производятъ давленія на опоры этой оси, какъ мы это доказали въ n° 83. Этотъ результатъ можно высказать другими словами, а именно:

черезъ опору проведемъ перпендикулярно къ оси вращенія OZ двѣ координатныя оси OX, OY. Моменты касательныхъ силъ относительно осей OX, OY равны нулю, если OZ главная ось для точки O.

Моментъ касательныхъ силъ относительно оси вращенія OZ, какъ мы видѣли (n° 64), равенъ произведенію угловаго ускоренія

$$\frac{d\omega}{dt}$$

на моментъ инерціи A относительно оси OZ.

160. *Моментъ Количествъ Движенія.* Касательныя силы инерціи представляютъ векторы, приложенные къ каждой частицѣ тѣла и владѣющіе слѣдующими свойствами:

a) Эти векторы перпендикулярны къ радіусу r.

b) величины этихъ векторовъ пропорціональны массѣ частицы m и радіусу r, т. е. равны произведенію изъ mr на нѣкоторый множитель, одинаковый для всѣхъ частицъ тѣла, а именно на

$$\frac{d\omega}{dt}.$$

Очевидно, здѣсь не важна величина или алгебраическое выраженіе этого множителя, а имѣетъ значеніе только одинаковость его для всѣхъ частицъ. Также несущественно то, что здѣсь идетъ рѣчь о силахъ,а не о какихъ либо другихъ векторахъ. Статическое выраженіе момента и условія равновѣсія моментовъ представляютъ чисто геометрическія теоремы, въ которыхъ сила фигурируетъ, какъ геометрическій линейный отрѣзокъ, т. е. какъ векторъ, и сущность понятія о силѣ здѣсь ни причемъ. Поэтому все сказанное о касательныхъ силахъ можно приложить и къ любому другому вектору, владѣющему тѣми же свойствами, т. е. перпендикулярному къ радіусу и пропорціональному произведенію массы на радіусъ.

Это замѣчаніе позволяетъ намъ приложить къ моментамъ количествъ движенія то, что мы знаемъ о касательныхъ силахъ инерціи. При вращеніи около оси OZ съ угловой скоростью s количество движенія частицы m будетъ перпендикулярно къ радіусу r и равно скорости этой частицы

$$s.r,$$

умноженной на массу, т. е.

$$s.mr.$$

Поэтому если ось OZ есть главная, то моменты количествъ движенія относительно перпендикулярныхъ къ ней осей OX и OY будутъ нули; моментъ же количества движенія относительно оси OZ будетъ равенъ произведенію

$$C.s$$

изъ момента инерціи C для оси OZ на угловую скорость вращенія s относительно этой оси.

161. Итакъ для главныхъ осей мы получаемъ очень простыя выраженія момента количествъ движенія. Вотъ почему, изучая движеніе твердаго тѣла, прежде всего нужно опредѣлить его главныя оси, чтобы получить наиболѣе простыя выраженія.

Этимъ упрощеніемъ всегда можно воспользоваться, такъ какъ въ каждой точкѣ тѣла навѣрное имѣются три главныя оси, взаимно перпендикулярныя между собою. (См. прибавленіе къ этой бесѣдѣ).

Пусть координатныя оси X, Y, Z, проведенныя черезъ неподвижную точку O нашего тѣла, будутъ главныя оси. Моменты инерціи относительно этихъ осей означимъ буквами A, B, C.

Элементарное движеніе тѣла есть непремѣнно вращеніе около нѣкоторой мгновенной оси. Угловую скорость этого вращенія разложимъ на три угловыя скорости

$$p, q, s$$

по осямъ координатъ. Тогда полное количество движенія любой частицы m нашего тѣла представитъ равнодѣйствующую изъ трехъ количествъ движенія, отвѣчающихъ тремъ вращеніямъ

$$p, q, s.$$

Моментъ количества движенія относительно одной изъ осей, напр. OX, получится, складывая моменты трехъ отдѣльныхъ слагающихъ вращеній. Но такъ какъ ось OX есть главная, то получимъ для нея:

моментъ того количества движенія, которое происходитъ отъ вращенія q около оси OY, равенъ нулю.

Также будетъ равенъ нулю моментъ того количества движенія, которое происходитъ отъ вращенія s около оси OZ.

Наконецъ моментъ того количества движенія, которое вызывается вращеніемъ около оси OX, будетъ

$$A.p.$$

Складывая эти моменты, получимъ, что полный моментъ количества движенія для оси OX равенъ

$$Ap.$$

Подобно этому получимъ для осей OY, OZ моменты количества движенія

$$Bq, Cs.$$

Такъ просты оказываются эти выраженія, при выборѣ для координатъ направленія главныхъ осей. При всякомъ другомъ направленіи координатныхъ осей получились бы гораздо болѣе сложныя формулы.

162. ***Ось (векторъ) моментовъ количествъ движенія.*** Мы можемъ теперь въ точности указать этотъ векторъ для твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, и такимъ образомъ получить вполнѣ конкретное представленіе объ этомъ механическомъ понятіи. Проекціи вектора на оси X, Y, Z (фиг. 127) будутъ

$$Ap, Bq, Cs.$$

Отложимъ эти отрѣзки одинъ за другимъ параллельно осямъ, т. е. проведемъ ломанную линію

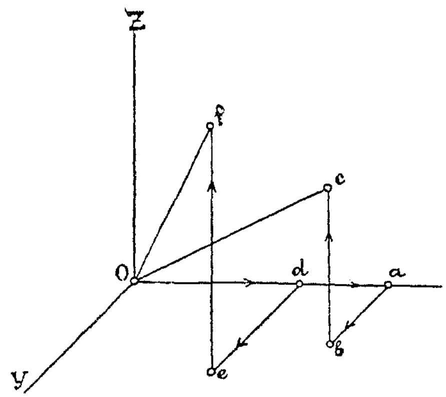
$$Oabc$$

и построимъ равнодѣйствующій векторъ

$$Oc.$$

Это и будетъ векторъ (или ось) моментовъ количества движенія. Конецъ его, точка c, будетъ полюсъ.

Для сравненія изобразимъ на томъ же чертежѣ мгновенную ось вращенія. Проекціи угловой скорости вращенія около этой оси названы



Фиг. 127.

$$p,\ q,\ s.$$

Сложимъ ихъ геометрически, т. е. проведемъ ломанную линію

$$Odef,$$

стороны которой

$$Od,\ de,\ ef$$

параллельны осямъ

$$X,\ Y,\ Z$$

и равны величинамъ

$$p,\ q,\ s.$$

Результатъ сложенія будетъ равнодѣйствующая Of; она изобразитъ направленіе мгновенной оси.

Мы видимъ, что, вообще говоря, ось моментовъ количествъ движенія не совпадаетъ съ мгновенной осью и можетъ сильно отъ нея отличаться. Совпаденіе произойдетъ только тогда, если

$$A = B = C,$$

т. е. когда всѣ три момента инерціи для трехъ главныхъ осей равны между собою. Но такое равенство представляетъ рѣдкій случай. Если оси проведены черезъ центръ фигуры тѣла, то это равенство выполняется для шара, для куба; искусственно можно подобрать много такихъ формъ, для которыхъ это равенство выполняется. Всѣ такія тѣла Ф. Клейнъ называетъ „шаровыми волчками“. Для нихъ явленія движенія получаются въ наиболѣе простой формѣ. Но въ примѣненіяхъ такія формы почти не встрѣчаются, и обыкновенно ось моментовъ количествъ движенія не совпадаетъ съ мгновенною осью.

163. Въ приложеніяхъ мы почти всегда имѣемъ дѣло съ тѣлами вращенія, имѣющими опредѣленную геометрическую ось фигуры. Мгновенная ось можетъ замѣтно различаться отъ оси фигуры, а также и отъ оси моментовъ количествъ движенія. Вообще говоря, это три совершенно различныя прямыя проходящія черезъ неподвижную точку тѣла; ихъ не слѣдуетъ смѣшивать между собою. Поводомъ къ смѣшенію служитъ то, что всѣ эти три линіи носятъ названіе „ось“, и случаи такой путаницы довольно многочисленны. Ф. Клейнъ, который въ своей замѣчательной „Теоріи Волчка“ *) посвящаетъ одну главу изложенію существующей популярной литературы по вопросу о волчкахъ и жироскопахъ, приводитъ много примѣровъ такого смѣшенія понятій. Иногда авторы популярныхъ объясненій въ началѣ своихъ разсужденій подъ словомъ ось подразумѣваютъ ось фигуры, а въ концѣ—уже говорятъ о мгновенной оси, не замѣчая этой перемѣны. Такое смѣшеніе понятій отнимаетъ всякую цѣнность получаемаго вывода.

164. *Случай быстраго вращенія около оси фигуры.* Мы постараемся не сдѣлать ошибки, о которой говорили въ концѣ предыдущаго n°, и, употребляя въ нашихъ разсужденіяхъ слово „ось“, будемъ указывать, о какой изъ трехъ упомянутыхъ осей идетъ рѣчь. Но замѣтимъ, что въ наиболѣе важныхъ для приложеній случаяхъ (волчки, жироскопы, вращеніе земли) эти три оси очень близки между собою и почти совпадаютъ. Въ этихъ случаяхъ угловая скорость вращенія около оси фигуры во много разъ превышаетъ двѣ другія угловыя скорости для двухъ другихъ главныхъ осей; моменты же инерціи для этихъ осей не представляютъ такой значительной разницы въ величинѣ. Положимъ, наша ось X—овъ есть ось фигуры. Такъ какъ скорость p значительно больше, чѣмъ q и s, то мгновенная ось будетъ очень мало отклоняться отъ оси X. При поставленныхъ нами условіяхъ величина

$$Ap$$

*) F. Klein und Sommerfeld. Theorie des Kreisels. Эта книга даетъ гораздо больше, чѣмъ обѣщаетъ ея заглавіе. Движеніе волчка даетъ поводъ автору разсмотрѣть значительное число основныхъ вопросовъ Механики и Высшей Математики.

будетъ знаичтельно больше, чѣмъ величина

$$Bq, Cs.$$

Поэтому ось моментовъ количествъ движенія будетъ очень близка къ оси фигуры. Такимъ образомъ направленія всѣхъ трехъ осей—

мгновенной оси
оси моментовъ количествъ движенія
оси фигуры—

почти совпадаютъ между собою. Мы различаемъ ихъ во время нашихъ разсужденій, но при опытахъ и демонстраціяхъ нельзя будетъ замѣтить разницы между этими тремя осями. Легче всего наблюдать положеніе оси фигуры; то, что опытъ укажетъ для нея, можетъ быть безъ замѣтной ошибки относимо и къ оси моментовъ количествъ движенія. Однимъ словомъ, различая указанныя три оси при нашихъ разужденіяхъ, мы можемъ, при повѣркѣ выводовъ опытомъ, во многихъ случаяхъ допустить совпаденіе направленій всѣхъ трехъ осей. Такъ, напр., выводы объ устойчивости движенія полюса, изложенные въ концѣ предъидущей бесѣды, даютъ много указаній на движеніе оси фигуры.

165. *Тѣла вращенія.* Если X есть ось фигуры такого тѣла, а оси Y и Z расположены по экватору его, то симметрія тѣла указываетъ на необходимость равенства моментовъ инерціи для осей Y, Z; т. е. будемъ имѣть

$$B = C.$$

Это соотношеніе значительно упрощаетъ разборъ движенія тѣла, и явленія вращенія его около неподвижной точки оказываются замѣтно проще, чѣмъ въ общемъ случаѣ, когда B и C не равны между собою.

Замѣтимъ при этомъ, что равенство двухъ моментовъ инерціи

$$B = C$$

можетъ получиться не только для тѣлъ вращенія, но и для другихъ формъ, напр., для прямоугольной призмы, основаніе которой есть правильный многоугольникъ четнаго числа сторонъ. Даже для тѣлъ несимметричной формы, при нѣкоторомъ распредѣленіи массъ, можетъ получиться то же равенство $B = C$. Движеніе тѣлъ такой формы ничѣмъ не будетъ отличаться отъ движенія тѣлъ вращенія.

165. Затѣмъ докажемъ одну теорему, которая имѣетъ особое значеніе при разборѣ движенія волчка, жироскоповъ и т. п.

Теорема. Если имѣемъ тѣло вращенія, и моментъ внѣшнихъ силъ для оси фигуры его равенъ нулю, то угловая скорость вращенія около этой оси (т. е. слагающая p нашихъ формулъ) будетъ величина постоянная.

Мы докажемъ эту теорему, пользуясь Закономъ Моментовъ Количествъ Движенія, въ той формѣ, которую ему дали Гэйуордъ и Резаль. Напомнимъ, что этотъ законъ относится къ моментамъ, взятымъ для неподвижной оси; его нельзя прямо примѣнять къ оси фигуры тѣла, которая движется и непрерывно измѣняетъ свое положеніе. Но мы прибѣгаемъ къ слѣдующему пріему: выберемъ какое нибудь мгновеніе времени за начальное и положенія главныхъ осей тѣла въ это мгновеніе за оси X, Y, Z. Затѣмъ пусть эти оси затвердѣютъ, сдѣлаются неподвижными; тѣло же продолжаетъ двигаться, и для слѣдующаго мгновенія главныя оси тѣла уже не будутъ совпадать съ осями X, Y, Z. Законъ Моментовъ Количествъ Движенія будемъ примѣнять къ такимъ отвердѣвшимъ, неподвижнымъ осямъ X, Y, Z.

Доказательство удобнѣе вести, не дѣлая съ самаго начала предположенія, что существуетъ равенство

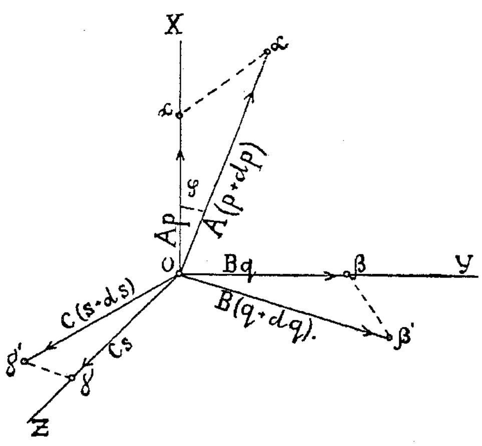
$$B = C;$$

лучше ввести это равенство при концѣ доказательства. На фиг. 128 пусть отрѣзки

$$O\alpha,\ O\beta,\ O\gamma$$

изображаютъ начальныя величины Момента Количествъ Движенія для осей X, Y, Z; эти величины будутъ

$$Ap,\ Bq,\ Cs.$$



Фиг. 128.

По прошествіи безконечно малаго времени dt главныя оси перемѣстятся и займутъ положенія

$$O\alpha',\ O\beta',\ O\gamma'.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ измѣнится угловая скорость, и проекціи ея на главныя оси уже будутъ отличаться отъ

$$p, q, s.$$

Новыя величины этихъ проекцій назовемъ

$$p + dp, \ q + dq, \ s + ds;$$

новыя значенія момента количества движенія для главныхъ осей будутъ

$$A (p + dp), \ B (q + dq), \ C (s + ds).$$

Эти значенія отложимъ въ видѣ отрѣзковъ

$$O\alpha', \ O\beta', \ O\gamma'.$$

Теперь посмотримъ, какъ перемѣстился полюсъ, т. е. конецъ оси Моментовъ Количествъ Движенія.

Координаты полюса были въ начальный моментъ

$$Ap, \ Bq, \ Cs,$$

а по прошествіи времени dt:

$$A (p + dp), \ B (q + dq), \ C (s + ds).$$

Перемѣщеніе полюса можно разсматривать какъ составное или равнодѣйствующее изъ перемѣщеній точекъ

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma,$$

т. е. составное изъ перемѣщеній

$$\alpha\alpha', \ \beta\beta', \ \gamma\gamma'.$$

Если нужно проектировать перемѣщеніе полюса на какую нибудь ось, то, вмѣсто такой проекціи, можно взять сумму проекцій на ту же ось перемѣщеній

$$\alpha\alpha', \ \beta\beta', \ \gamma\gamma'.$$

Скорость полюса по той же оси получится, раздѣляя его перемѣщеніе на элементъ времени dt; то есть нужно взять сумму проекцій перемѣщеній

$$\alpha\alpha', \ \beta\beta', \ \gamma\gamma'$$

и раздѣлить эту сумму на dt.

Сдѣлаемъ это для оси OX. По теоремѣ Гэйуордъ-Резаля, скорость полюса будетъ равна моменту Mx внѣшнихъ силъ для оси OX.

Начнемъ съ перемѣщенія $\alpha\alpha'$. Разсматривая треугольникъ $O\alpha\alpha'$ и проектируя на ось X, получимъ (при томъ направленіи сторонъ, которое означено на чертежѣ стрѣлками):

$$\text{проекція } O\alpha + \text{проекція } \alpha\alpha' = \text{проекціи } O\alpha'.$$

Но уголъ между OX и $O\alpha'$ безконечно малъ; при проектированіи нужно $O\alpha'$ умножить на косинусъ этого угла, а косинусъ отличается отъ единицы величинами второго порядка. Поэтому вмѣсто косинуса нужно поставить единицу, и проекція $O\alpha'$ равна самой длинѣ $O\alpha'$. Слѣд. уравненіе проекцій получаетъ форму:

$$O\alpha + \text{проекція } \alpha\alpha' = O\alpha',$$

т. е.

$$Ap + \text{проекція } \alpha\alpha' = A\,(p + dp),$$

откуда

$$\text{проекція } \alpha\alpha' = A.dp.$$

Дѣля же на dt, получимъ проекцію скорости перемѣщенія $\alpha\alpha'$.

$$A.\frac{dp}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (I).$$

Переходимъ къ перемѣщенію $\beta\beta'$. Длина $O\beta$ во-первыхъ увеличивается, во-вторыхъ поворачивается и занимаетъ положеніе $O\beta'$. Увеличеніе длины не даетъ никакой проекціи на ось OX; разсмотримъ только поворачиваніе. Отъ чего оно происходитъ? Движеніе всего тѣла, а слѣд. и линіи $O\beta$, въ теченіи безконечно малаго времени dt, можетъ быть разсматриваемо какъ происходящее отъ совокупности трехъ вращеній около осей X, Y, Z съ угловыми скоростями

$$p,\ q,\ s.$$

Вращеніе около оси OY не сообщаетъ точкѣ β никакого перемѣщенія. Вращеніе около OX перемѣщаетъ точку β въ плоскости YOZ, слѣд. соотвѣтствующая проекція перемѣщенія на ось OX равна нулю. Остается вращеніе около оси Z. При этомъ вращеніи, если оно положительное, т. е. направлено по стрѣлкѣ (фиг. 129), то точка β идетъ внизъ и даетъ отрицательную проекцію перемѣщенія на ось OX. Уголъ поворота за время dt будетъ

$$s.dt;$$

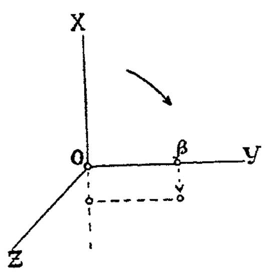
само перемѣщеніе получится, умножая этотъ уголъ на длину $O\beta = Bq$; съ точностью до безконечно малыхъ высшаго порядка проекція этого перемѣщенія на OX равна самому перемѣщенію, т. е. получаемъ проекцію:

$$-s.dt.\ B.q.$$

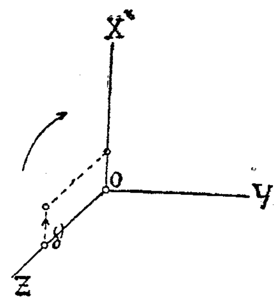
Дѣля на dt, найдемъ соотвѣтствующую скорость

$$-B.q.s\ \ldots\ldots (II).$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ скорость, отвѣчающую перемѣщенію $\gamma\gamma'$. Если вращеніе около оси Y, т. е. q, положительное (по стрѣлкѣ на фиг. 130), то проекція перемѣщенія $\gamma\gamma'$



Фиг. 129.



Фиг. 130.

будетъ положительная; величина скорости получится изъ (II), замѣняя въ немъ

радіусъ Bq . . . . радіусомъ Cs
скорость s . . . . скоростью q,

получимъ проекцію третьей скорости

$$+C.s.q\ \ldots\ldots (III).$$

Складывая три проекціи скорости полюса (I), (II), (III) и уравнивая эту сумму моменту M_x, получаемъ

$$A\frac{dp}{dt} + q.s.\ (C-B) = M_x\ \ldots\ldots (54).$$

Мы бы могли получить два подобныхъ же уравненія для осей OY и OZ, или прямо написать ихъ по аналогіи съ (54). Это будутъ три знаменитыхъ Эйлеровыхъ уравненія движенія твердаго тѣла. Но намъ они не нужны въ общемъ видѣ. Мы разбираемъ частную задачу; у насъ тѣло вращенія, слѣд.

$$B = C.$$

Затѣмъ у насъ по заданію моментъ M_x внѣшнихъ силъ для оси фигуры тѣла равенъ нулю. Тогда уравненіе (54) даетъ:

$$A\frac{dp}{dt}=O;$$

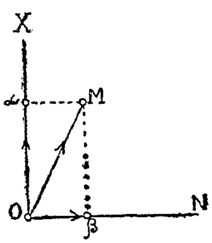
откуда $p=\text{const}$.

т. е. угловая скорость около оси фигуры есть величина постоянная, что и требовавалось доказать. Итакъ мы убѣдились въ вѣрности теоремы высказанной въ началѣ n°. Оказывается, что если внѣшнія силы даютъ моментъ M_x равный нулю, т. е. если внѣшніи силы пересѣкаютъ главную ось X или ей параллельны, то угловая скорость около этой оси постоянная: но это справедливо только тогда, если

$$B=C,$$

т. е. если имѣемъ тѣло вращенія около оси X, или аналогичный случай симметрическаго расположенія массъ.

167. *Замѣчаніе.* При равенствѣ двухъ главныхъ моментовъ инерціи, напр. B и C для осей Y, Z, оказывается, что всѣ оси, лежащія въ плоскости YZ, будутъ главныя оси тѣла; моменты инерціи для всѣхъ этихъ осей одинаковы и равны B. Въ этомъ случаѣ, вмѣсто разложенія угловой скорости на три главныя оси, можно примѣнять разложеніе ея на двѣ главныя оси. Пусть (фиг. 131) OM есть мгновенная ось вращенія, а отрѣзокъ OM изображаетъ величину угловой скорости. За одно направленіе разложенія примемъ ось OX (ось фигуры въ случаѣ тѣла вращенія); за другое направленіе разложенія выберемъ линію ON, лежащую въ плоскости XOM и перпендикулярную къ OX. Ось ON лежитъ въ плоскости YZ, слѣд. будетъ главная. Итакъ, обѣ оси, на которыя разложена угловая скорость, будутъ главныя. А всякая главная ось владѣетъ тѣмъ свойствомъ, что для нея проекція момента количествъ движенія выражается очень просто, а именно равна произведенію угловой скорости на моментъ инерціи для этой оси. Если проекціи угловой скорости на OX, ON назовемъ p, q, то проекціи момента количествъ движенія для тѣхъ же осей будутъ



Фиг. 131.

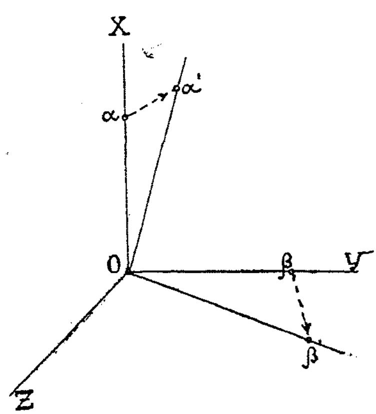
$$Ap,\ B.q.$$

Мы бы могли и въ случаѣ неравенства величинъ B и C разложить угловую скорость OM такъ же, какъ только что дѣлали, т. е. на слагающія по главной оси OX и по линіи ON, лежащей въ плоскости XOM и перпендикулярной къ OX. Но тогда ON не будетъ главная ось, и моментъ количества движенія для нея получаетъ сложное выраженіе. Въ этомъ случаѣ такое разложеніе безполезно; гораздо проще разложить скорость на три главныя оси; тогда получимъ для проекцій момента количествъ движенія простыя выраженія

$$Ap, \ Bq, \ Cs.$$

Вообще въ этомъ вопросѣ главныя оси имѣютъ значеніе именно вслѣдствіе простоты получающихся для нихъ проекцій момента количествъ движенія. Вотъ почему мы выбираемъ исключительно главныя оси; по этой причинѣ для тѣлъ вращенія можно примѣнять разложеніе на двѣ оси, а въ случаѣ неравенства величинъ B и C такое разложеніе не пригодно.

168. Примѣняя для тѣлъ вращенія разложеніе на двѣ оси, мы бы могли нѣсколько проще доказать нашу теорему (n° 165) о постоянствѣ угловой скорости p относительно оси фигуры тѣла. На самомъ дѣлѣ пусть (фиг. 132) начальное положеніе оси фигуры есть OX, и начальная угловая скорость разложена на два направленія OX и OY; проекціи момента количества движенія изобразятся отрѣзками $O\alpha$, $O\beta$. По прошествіи времени dt ось фигуры займетъ новое положеніе $O\alpha'$, и величина момента количества движенія изобразится отрѣзкомъ $O\alpha'$. Теперь уже разложеніе дѣлается на направленія $O\alpha'$ и $O\beta'$, причемъ $O\beta'$ вообще говоря не будетъ та же самая линія нашего вращающагося тѣла, которая въ начальный моментъ занимала положеніе OY. Но это будутъ двѣ безконечно близкія линіи вращающагося тѣла. Легко показать, что проекція перемѣщенія $\beta\beta'$ на ось X величина 2-го порядка; ее отбросимъ. Остается только проекція перемѣщенія $\alpha\alpha'$, для которой получаемъ по прежнему выраженіе



Фиг. 132.

$$A.dp.$$

Соотвѣтствующая скорость полюса будетъ

$$A.\frac{dp}{dt}.$$

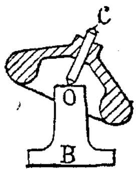
А такъ какъ по заданію моментъ внѣшнихъ силъ для оси OX равенъ нулю, то по теоремѣ Гэйуордъ-Резаля эта скорость полюса равна нулю, и мы получаемъ

$$A.\frac{dp}{dt}=O, \text{ т. е. } p.=\text{const.}$$

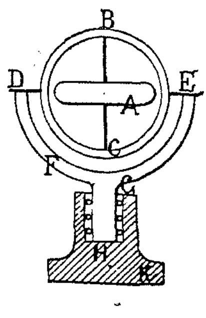
Мы не дѣлали этого упрощенія и исходили изъ общаго случая, желая попутно получить Эйлеровы уравненія. Въ дальнѣйшихъ выводахъ относительно тѣлъ вращенія будемъ постоянно примѣнять разложеніе на двѣ оси. Такъ мы поступимъ при разборѣ слѣдующаго вопроса.

169. *Движеніе тѣла вращенія, имѣющаго неподвижную точку въ случаѣ, когда на него не дѣйствуютъ внѣшнія силы.* Чтобы устранить дѣйствіе вѣса, мы подопремъ наше тѣло въ центрѣ тяжести. Для этого примѣняются два пріема:

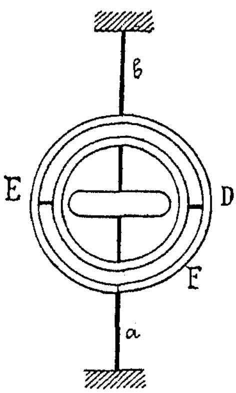
a) Волчокъ Мэксвелла (фиг. 133). Тѣлу волчка придана форма



Фиг. 133.



Фиг. 134.



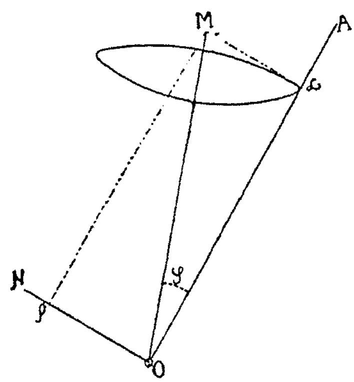
Фиг. 135.

въ родѣ колокольчика съ тяжелымъ краемъ; центръ тяжести приходится внутри полости колокольчика, и ось OC, на которую насаженъ волчокъ, оканчивается остріемъ въ центрѣ тяжести O. При такой формѣ можно оперетъ волчокъ его центромъ тяжести на подставку B, которая не будетъ мѣшать движенію волчка.

b) Жироскопы Фесселя, Бонненбергера, Фуко. Тѣло жироскопа A (фиг. 134) посажено на ось BC, которая имѣетъ карданову подвѣску; т. е. ось вращается въ кольцѣ, имѣющемъ цапфы D, E, перпендикулярныя къ BC. Цапфы вращаются въ обоймѣ DFE, которая сама можетъ свободно (безъ тренія) поворачиваться около вертикальной оси. Для достиженія такого поворачиванія употребляютъ два средства: или обойма DFE имѣетъ цилиндрическій хвостъ GH, свободно вращающійся въ неподвижной подставкѣ K; или обойма DFE подвѣшена на тонкой нити b, a (фиг. 135), которая почти не представляетъ сопротивленія поворачиванію обоймы около вертикальной оси.

Въ такихъ приборахъ дѣйствіе тяжести устранено, и, сообщивъ волчку или жироскопу нѣкоторый толчокъ, мы получаемъ движеніе по инерціи *). Въ чемъ будетъ состоять это движеніе?

Начальный моментъ количества движенія волчка изобразимъ по величинѣ и по направленію векторомъ OM (фиг. 136); такъ какъ внѣшнихъ силъ вовсе нѣтъ, то моментъ количества движенія не будетъ измѣняться, слѣд. полюсъ M неподвиженъ. Пусть OA изображаетъ положеніе оси фигуры волчка для любого мгновенія. Разложимъ угловую скорость вращенія и моментъ количества движенія на два направленія: по оси фигуры OA и по линіи къ ней перпендикулярной ON; составляющія угловой скорости назовемъ



Фиг. 136.

$$p, q,$$

а составляющія моменты будутъ

$$Ap, Bq;$$

послѣдніе изображены на чертежѣ отрѣзками $O\alpha$, $O\beta$. Складывая ихъ по правилу параллелограмма, получимъ полный моментъ количествъ движенія для разсматриваемаго мгновенія; онъ долженъ быть равенъ начальному значенію момента OM.

Но угловая скорость p около оси фигуры волчка по доказанному должна быть постоянная, такъ какъ реакціи опоръ этой оси даютъ для нея моментъ, равный нулю. Слѣдовательно отрѣзокъ $O\alpha$, равный

$$Ap,$$

сохраняетъ во все время движенія одну и ту же величину. А

*) Пренебрегаемъ сопротивленіемъ воздуха и треніемъ на осяхъ.

отсюда слѣдуетъ, что уголъ φ (между осью фигуры OA и осью постояннаго момента количества движенія) тоже не долженъ измѣняться. Поэтому линія $O\alpha$ должна или быть неподвижной, или описывать круговой конусъ около OM. Но первое невозможно, такъ какъ, вслѣдствіе существованія скорости q, ось фигуры OA должна перемѣщаться. Итакъ ось фигуры A должна описывать круговой конусъ около оси моментовъ количествъ движенія.

Можно задать себѣ вопросъ, съ какой скоростью будетъ происходить это коническое движеніе? Общая симметрія всѣхъ условій съ несомнѣнностью указываетъ, что эта скорость должна быть постоянною.

Итакъ единственное возможное въ нашемъ вопросѣ движеніе есть: равномѣрное коническое движеніе оси фигуры около оси Моментовъ Количествъ Движенія. Равромѣрное коническое движеніе оси фигуры называется регулярной прецессіей. Итакъ для тѣла вращенія, имѣющаго неподвижную точку, движеніе по инерціи есть непремѣнно регулярная прецессія. Гораздо болѣе сложно движеніе по инерціи тѣла, для котораго не существуетъ равенства моментовъ инерціи B и C.

170. *Жироскопъ Фуко и доказательство вращенія земли.* Разсмотримъ движеніе жироскопа, которому сообщено вращеніе около его оси фигуры со значительной скоростью. При такой подвѣскѣ жироскопа, какъ на фиг. 134, 135 (а также и для волчка Мэксвелля фиг. 133), на жироскопъ не могутъ передаваться никакія силы, кромѣ незначительнаго тренія и сопротивленія воздуха. Жироскопъ можно считать движущимся по инерціи около подпертаго своего центра тяжести, который увлекается землею при ея вращеніи. Оставимъ въ сторонѣ поступательное движеніе жироскопа, одинаковое съ движеніемъ его центра тяжести, и будемъ говорить только о вращеніи жироскопа около центра тяжести. Единственное возможное движеніе его оси фигуры есть, какъ доказано въ n° 169, регулярная прецессія около оси моментовъ количествъ движенія, которая неизмѣнна. Если въ началѣ движенія, при сообщеніи жироскопу быстраго вращенія, ось фигуры не получитъ никакого бокового толчка, то мы имѣемъ только вращеніе жироскопа около оси фигуры; тогда эта ось совпадаетъ съ осью моментовъ количествъ движенія; скорость полюса въ началѣ равна нулю, а никакихъ внѣшнихъ паръ нѣтъ, слѣд. скорость полюса

и далѣе должна оставаться нулемъ. Поэтому ось фигуры и дальше будетъ совпадать съ осью моментовъ количествъ движенія, т. е. будетъ сохранять неизмѣнное положеніе въ пространствѣ. Слѣдовательно она можетъ служить для указанія, что земля вращается. Ось фигуры жироскопа будетъ перемѣщаться относительно земли; это кажущееся движеніе, которое мы увидимъ, а въ дѣйствительности происходитъ обратное—перемѣщеніе земли относительно неизмѣнной оси жироскопа.

Направимъ ось фигуры жироскопа на нѣкоторую произвольную неподвижную звѣзду; тогда эта ось будетъ и далѣе направлена на ту же звѣзду, какъ на неподвижный предметъ. То есть намъ будетъ казаться, что ось фигуры жироскопа, вмѣстѣ съ избранной звѣздой производитъ суточное обращеніе около полярной звѣзды.

Въ этомъ должно состоять явленіе для описаннаго свободнаго жироскопа. Иногда утверждаютъ, что ось фигуры жироскопа Фуко стремится стать непремѣнно параллельно оси земли, т. е. стремится направиться на полярную звѣзду. Предъидущія объясненія показываютъ, что это не такъ. Ось фигуры жироскопа не участвуетъ во вращеніи земли, и на нее не дѣйствуютъ никакія устанавливающія силы, стремящіяся придать ей то или другое направленіе. Она сохраняетъ по инерціи то случайное направленіе, которое ей было придано въ началѣ.

171. *Устойчивость жироскопа.* Для правильнаго пониманія этого явленія необходимы нѣкоторыя поясненія. Возьмемъ жироскопъ Фуко или волчокъ Мэксвелла, но не будемъ сообщать имъ вращенія около оси фигуры. Установимъ ось фигуры по извѣстному опредѣленному направленію и затѣмъ предоставимъ жироскопъ самому себѣ, стараясь при этомъ не сообщить никакого толчка. Такъ какъ на жироскопъ не дѣйствуютъ никакія силы, то по инерціи ось фигуры должна сохранять неизмѣнное положеніе. Слѣдовательно она не будетъ участвовать во вращеніи земли? Итакъ она будетъ показывать всегда на одну и ту же неподвижную звѣзду и такимъ образомъ демонстрировать вращеніе земли? Но зачѣмъ же тогда сообщаютъ жироскопу вращеніе, да еще съ громадной скоростью, если то же самое даетъ вовсе не вращающійся жироскопъ?

Не трудно убѣдиться въ томъ, что описанный опытъ съ не вращающимся жироскопомъ навѣрное не удастся, потому что такой жироскопъ неустойчивъ. Уже при началѣ невозможно избѣжать сообщенія оси его хотя небольшого толчка; предоставленная сама себѣ, ось пойдетъ по направленію толчка и очень скоро значительно измѣнитъ свое начальное направленіе. Такое же измѣненіе будетъ происходить и отъ дальнѣйшихъ случайныхъ толчковъ, сотрясеній и т. д. Получивши толчокъ, ось фигуры по инерціи будетъ двигаться по направленію толчка.

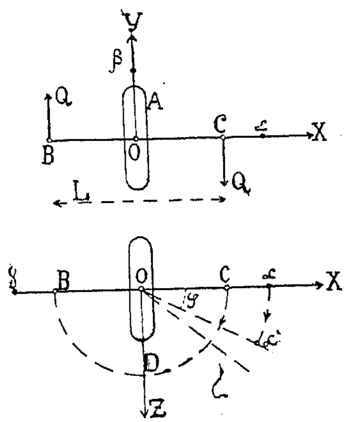
Ничего подобнаго не произойдетъ, если жироскопъ вращается около своей оси съ большою скоростью. Онъ устойчивъ и почти вовсе не поддается дѣйствію толчковъ. Сущность этого свойства устойчивости опредѣляется теоремой Резаля. Если скорость вращенія жироскопа около его оси велика, а толчки незначительны, то ось фигуры жироскопа будетъ очень близка къ оси моментовъ количествъ движенія; и при наблюденіяхъ можно считать, что эти двѣ линіи совпадались. Но движеніе оси моментовъ количества движенія, или движеніе полюса, представляетъ, какъ мы видѣли, движеніе безъ инерціи; полюсъ перемѣщается только во время дѣйствія силы, и когда сила прекращается, то и полюсъ останавливается; всякіе толчки, какъ начальный, такъ и послѣдующіе, измѣняютъ это движеніе только въ теченіи своего дѣйствія, а такъ какъ оно кратковременно, то измѣненіе будетъ очень не велико, незамѣтно, и потомъ не остается никакого дальнѣйшаго слѣда этого толчка. Между тѣмъ если движеніе имѣетъ инерцію, то небольшой толчокъ сообщаетъ движеніе, продолжающееся съ постоянной скоростью, и съ теченіемъ времени произойдетъ значительное удаленіе отъ первоначальнаго положенія, хотя сила уже давно перестала дѣйствовать.

Возьмемъ волчокъ Мэксвелла не вращающійся и произведемъ быстрый ударъ молоткомъ по концу оси; она начнетъ двигаться по направленію толчка и скоро совершенно измѣнитъ свое первоначальное направленіе. Но пусть волчокъ вертится съ большой скоростью, и произведемъ тотъ же ударъ. Ось почти не подвинется отъ такого удара, потому что онъ кратковременен̆ъ, и ось не получитъ остающейся скорости движенія по направленію удара. Дѣйствіе удара будетъ состоять въ томъ, что измѣнитъ положеніе полюса, но измѣнитъ очень мало, такъ какъ дѣйствуетъ короткое время. Послѣ удара ось фигуры волчка немного не совпадаетъ съ полюсомъ. Затѣмъ начнется движеніе по инерціи. По доказанному ось фигуры при этомъ должна описывать конусъ около полюса; конусъ будетъ имѣть очень небольшое раствореніе, и изъ предѣловъ этого конуса ось фигуры не выйдетъ, хотя бы прошло значительное время.

Вотъ въ чемъ состоитъ устойчивость быстро вращающихся жироскоповъ, и вотъ почему для демонстраціи вращенія земли необходимы жироскопы, дѣлающіе значительное число оборотовъ въ секунду.

Такова, предложенная Фуко, демонстрація вращенія земли.

172. ***Усилія, необходимыя для того, чтобы измѣнить направленіе оси быстро вращающагося тѣла.*** Имѣемъ тѣло вращенія A (фиг. 137), которому сообщили быстрое вращеніе около его оси фигуры BC. Затѣмъ сообщаемъ оси, вмѣстѣ съ тѣломъ A, равномѣрное поворачиваніе около центра O, причемъ концы оси B, C описываютъ кругъ. Для этого нужно приложить въ точкахъ B, C нѣкоторыя силы. Желаемъ найти величины и направленіе этихъ силъ.



Фиг. 137.

Опытъ соотвѣтствующій этой задачѣ, можно произвести слѣд. образомъ: возьмемъ руками за подшипники, въ которыхъ вращаются концы оси B, C, и сообщимъ оси насильственно круговой поворотъ CDB. Тогда въ нашихъ рукахъ мы получимъ ощущеніе тѣхъ силъ, разысканіе которыхъ требуетъ поставленная задача.

Мы предполагаемъ поворотъ равномѣрнымъ, чтобы устранить усложненіе, вызываемое неравномѣрностью. Если наша ось была въ покоѣ, то по необходимости въ началѣ движенія появится неравномѣрность; но мы устраняемъ изъ разсмотрѣнія этотъ періодъ движенія, предполагаемъ, что онъ кончился и установилось равномѣрное движеніе. Допускаемъ, что вредныхъ сопротивленій нѣтъ. Оставляемъ въ сторонѣ тѣ давленія на подпоры B, C, которыя происходятъ отъ вѣса и другихъ внѣшнихъ силъ; эти давленія легко находятся по правиламъ Статики. Мы же ищемъ только тѣ силы, которыя должны дѣйствовать въ точкахъ B, C вслѣдствіе динамическихъ причинъ, т. е. вслѣдствіе того, что тѣло A вращается около оси BC; если бы тѣло A не вращалось, то искомыя нами силы очевидно не существовали бы, и равномѣрное вращеніе около O поддерживалось бы само собою, вслѣдствіе инерціи.

Назовемъ черезъ p угловую скорость вращенія тѣла около оси фигуры. Уголъ поворота околи оси OY называемъ φ; соотвѣтствующая угловая скорость будетъ

$$\frac{d\varphi}{dt}.$$

Моментъ инерціи для оси фигуры назовемъ A, а для оси OY, къ ней перпендикулярной—B. Тогда проекціи момента количествъ движенія будутъ:

$$\text{для оси OX} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; A.p$$
$$\text{для оси OY} \;.\;.\;.\;.\; B.\frac{d\varphi}{dt}.$$

Эти моменты на чертежѣ изображены отрѣзками $O\alpha$ и $O\beta$.

Во время движенія, по заданію, угловая скорость поворота

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

постоянная. Также остается постоянной и скорость p, потому что внѣшнія силы (т. е. тѣ поворачивающія силы, которыя дѣйствуютъ на точки B, C) приложены на оси фигуры и даютъ для нея моментъ, равный нулю; а при этихъ условіяхъ, какъ было доказано въ n° 165, скорость p остается постоянной. Итакъ обѣ угловыя скорости

$$p \text{ и } \frac{d\varphi}{dt}$$

постоянныя, слѣд. длины отрѣзковъ $O\alpha$, $O\beta$ не измѣняются во время движенія.

Примѣнимъ теорему Резаля и разсмотримъ движеніе полюса по той оси OZ, которая перпендикулярна и къ оси фигуры OX, и къ оси поворота OY. Точка β не мѣняетъ свое положеніе, слѣд. проекція перемѣщенія ея есть ноль. Точка α описываетъ дугу круга $\alpha\alpha'$ около центра O; для времени dt длина $\alpha\alpha'$ получится, умножая радіусъ $O\alpha$, т. е. Ap, на безконечно малый уголъ поворота $d\varphi$. Проекція $\alpha\alpha'$ на ось OZ, при отбрасываніи безконечно малыхъ выше 1-го порядка, равна самой дугѣ $\alpha\alpha'$, т. е.

$$A.p.d\varphi.$$

Дѣля на время dt, получимъ скорость движенія полюса по оси OZ.

$$A.p.\frac{d\varphi}{dt}.$$

По теоремѣ Резаля, эта скорость равна моменту M. внѣшнихъ силъ относительно оси OZ. Для осей OX, OY скорости полюса нули, слѣд. моменты внѣшнихъ силъ для этихъ осей тоже нули.

Такимъ образомъ оказывается, что искомыя силы Q, которыя дѣйствуютъ въ точкахъ B, C, даютъ для оси Y моментъ, равный нулю; слѣдовательно эти силы параллельны оси OY. Величина ихъ должна быть такова, чтобы моментъ для оси Z, т. е. моментъ пары

$$M = Q.L,$$

равнялся скорости полюса, т. е.

$$M = Ap.\frac{d\varphi}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55).$$

Уравненіе (55) даетъ не только величину, но и знакъ момента M, слѣд. указываетъ, въ какую сторону должны быть направлены силы Q, приложенныя въ B и C. Если p и $\frac{d\varphi}{dt}$ оба положительные или оба отрицательные, то и M положительный. Моментъ пары M будетъ отрицательный, если p и $\frac{d\varphi}{dt}$ разныхъ знаковъ.

Направленіе положительнаго вращенія $\frac{d\varphi}{dt}$ показано на чертежѣ стрѣлкою. Для вращенія p имѣемъ такое правило: станемъ на положительной оси X и будемъ оттуда смотрѣть на наше вращающееся тѣло, расположенное у начала координатъ; если вращеніе происходитъ по часовой стрѣлкѣ, то p положительное. Наконецъ знакъ момента пары опредѣляется, ставши на положительной оси Z и глядя оттуда къ началу координатъ на BC; если силы Q стремятся сообщить вращеніе по часовой стрѣлкѣ, то M положительный.

Примѣняя это правило, необходимо располагать оси OX и OZ такъ, какъ у насъ на чертежѣ, т. е. чтобы переходъ отъ X къ Z совершался поворачиваніемъ на 90 градусовъ въ сторону положительнаго вращенія φ. Наша формула (55) выведена при такомъ расположеніи осей, и оно должно соблюдаться и при примѣненіяхъ этой формулы. Дѣйствительно при выводѣ формулы мы считали, согласно съ составленнымъ чертежемъ (фиг. 137), что при положительномъ моментѣ количествъ движенія $O\alpha$ и при поворотѣ въ сторону увеличенія φ проекція перемѣщенія полюса на ось Z положительная. Это указываетъ, что направленіе положительной Z должно быть такое, какъ на чертежѣ, а не обратное ему.

Направленіе силъ Q для случая положительныхъ p и $\frac{d\varphi}{dt}$ показано на фигурѣ. Это силы, которыя нужно приложить къ оси вращающагося тѣла, чтобы поворачивать эту ось. Конечно само вращающееся тѣло реагируетъ въ точкахъ B и C на связь, принуждающую ось поворачиваться, по направленіямъ прямо противуположнымъ этимъ нарисованнымъ силамъ Q.

173. Такимъ образомъ мы рѣшили нашу задачу и вполнѣ опредѣлили величины и направленія силъ Q, которыя нужно приложить къ концамъ оси, чтобы производить поворотъ этой оси. Оказывается, что силы Q перпендикулярны къ плоскости поворота, т. е. къ плоскости круга BDC. Если мы производимъ поворотъ къ горизонтальной плоскости, то силы Q вертикальны. При поворотѣ въ вертикальной плоскости, силы Q будутъ горизонтальны; онѣ идутъ не по направленію пути точекъ B, C, а всегда перпендикулярно къ этому пути.

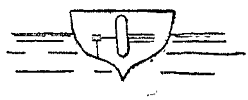
Такой результатъ съ перваго раза представляется удивительнымъ и даже парадоксальнымъ. Но легко убѣдиться въ правильности его помощію простого опыта. Нужно попробовать поворачивать руками ось быстро вертящагося тѣла—напр. жироскопа, велосипеднаго колеса. Мы тогда почувствуемъ, что ось сопротивляется повороту, стремится вырваться изъ рукъ и оказываетъ на наши руки давленія, реакціи. По ощущенію въ рукахъ мы убѣдимся, что при поворотѣ въ горизонтальной плоскости ось давитъ на руки двумя вертикальными силами и обратно.

174. Итакъ силы Q перпендикулярны къ пути своихъ точекъ приложенія. Слѣд. работа, производимая силами Q, равна нулю. И этотъ результатъ нѣкоторымъ представляется парадоксальнымъ. Но въ немъ нѣтъ ничего удивительнаго или особеннаго; мы имѣемъ множество случаевъ силъ, работа которыхъ равна нулю; таковы всѣ реакціи неподвижныхъ опоръ. Наоборотъ, если бы силы Q производили нѣкоторую работу, то мы получили бы абсурдный результатъ. При поворотѣ нашей оси съ вертящимся тѣломъ, скорость вращенія не измѣняется; слѣдовательно живая сила остается постоянной. А поэтому и работа силъ Q должна равняться нулю; если бы эта работа имѣла нѣкоторую положительную величину, то мы имѣли бы явленіе, въ которомъ безслѣдно исчезаетъ работа. Обратно если

бы работа силъ Q была отрицательная, то мы имѣли бы perpetuum mobile.

175. ***Примѣръ. При качкѣ судовъ***, оси вращающихся машинъ насильственно увлекаются судномъ и поворачиваются въ вертикальной плоскости; слѣд. въ подшипникахъ осей къ статическимъ давленіямъ, прибавляются динамическія силы того же рода, какъ разсмотрѣнныя нами въ предъидущихъ $n^o n^o$. Если ось вращается быстро (центробѣжные циркуляціонные насосы, динамо-машины, паровыя турбины), то дополнительная динамическая прибавка будетъ значительна, и ее нужно принимать во вниманіе при расчетѣ подшипниковъ.

Направленіе этого дополнительнаго давленія опредѣляется по вышеизложенному правилу. Такъ, напр., если ось расположена поперекъ судна (фиг. 138), то при поперечной качкѣ дополнительныя давленія горизонтальны и идутъ параллельно оси судна.



Фиг. 138.

176. *Маховозъ.* Явленіе, нами разсматриваемое, должно было проявиться въ значительной степени въ такъ называемомъ маховозѣ, при прохожденіи имъ кривыхъ.

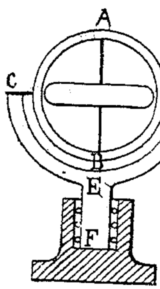
Маховозомъ было названо приспособленіе, которое предложилъ инженеръ Шуберскій для облегченія подъема тяжелыхъ товарныхъ поѣздовъ на крутые уклоны. Для этого всегда пользовались живой силой самаго поѣзда—разгоняли его передъ подъемомъ. Шуберскій, для увеличенія живой силы поѣзда, прибавилъ маховозъ, особый вагонъ, несущій на себѣ горизонтальную ось съ двумя тяжелыми маховиками; она лежитъ на трущихся каткахъ, передающихъ движеніе колесамъ вагона. На горизонтальныхъ участкахъ маховики не вращаются, но передъ большимъ подъемомъ разгоняютъ маховики, запасаютъ въ нихъ значительную живую силу, которая потомъ истрачивается на подъемъ поѣзда по уклону. Шуберскій ставитъ два маховика изъ литой стали съ радіусами въ 6 футъ, при общемъ вѣсѣ въ 1600 пудъ; имъ сообщается скорость окружности до 460 футъ въ секунду *).

Если при такой скорости маховиковъ поѣздъ будетъ проходить кривую съ радіусомъ около 350 футъ, то динамическія силы Q отъ поворота оси маховоза получатся около 8—9 тоннъ, т. е. будутъ

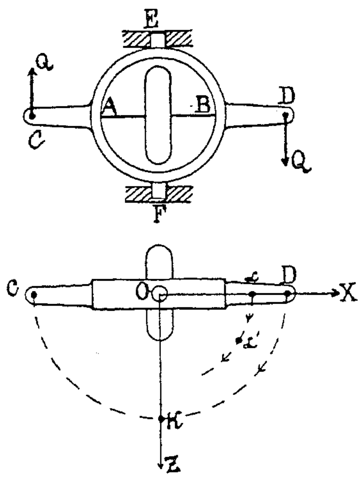
*) Данныя взяты изъ брошюры Шуберскаго. Маховозъ какъ средство и т. д. 1864 г.

громадныя. Такъ какъ поворотъ будетъ происходить почти въ горизонтальной плоскости, то эти силы будутъ вертикальны.

177. *Связанный жироскопъ.* Въ n°n° 170—174 мы разсматривали жироскопъ, который имѣлъ полную свободу вращаться относительно любой оси, проходящей черезъ неподвижную точку. Теперь свяжемъ, стѣснимъ нѣсколько эту свободу. Напр. (фиг. 139) въ жироскопѣ Бонненбергера уничтожимъ воз-



Фиг. 139.



Фиг. 140.

можность вращенія обоймы около вертикальной оси EF, для чего нужно винтомъ зажать эту ось. Остаются возможными вращенія около оси жироскопа AB и около оси цапфъ CD.

Или возьмемъ обойму съ быстро вертящимся колесомъ, которую мы разсматривали въ n° 172 и которую поворачивали, дѣйствуя на концы C, D. Придѣлаемъ къ ней (фиг. 140) цапфы E, F, которыя вращаются въ подшипникахъ неподвижной подставки. Теперь движеніе нашей обоймы связано, оно не можетъ быть ничѣмъ инымъ кромѣ вращенія около оси цапфъ EF.

Сравнимъ явленія, получающіяся при введеніи этихъ связей, съ прежнимъ случаемъ свободнаго жироскопа, предполагая, что и теперь, также какъ прежде, имѣемъ быстрое вращеніе около оси AB.

Прежде жироскопъ Бонненбергера (фиг. 139) показывалъ значительную устойчивость оси AB. Удары молоточкомъ въ точку A почти не измѣняли положенія этой оси; послѣ удара она описываетъ конусъ, мало удаляясь отъ своего положенія до удара.

Теперь оказывается, что совершенно исчезла всякая устойчивость AB; взявши рукой за точку A, мы можемъ вращать кольцо съ жироскопомъ около цапфъ CD, и при этомъ не встрѣчаемъ никакого сопротивленія. Слабый ударъ молоточкомъ въ точку A сообщаетъ *кольцу поворотъ около оси* CD на четверть окружности и болѣе.

Или обратимся къ фиг. 140; прежде взявши обойму руками въ точкахъ C, O и поворачивая ее по кругу CKD, мы ясно чувствовали, что обойма съ жироскопомъ стремится вырваться изъ рукъ; мы нашли силы Q, представляющія такое стремленіе. Теперь дѣйствуя на C, D, не встрѣчаемъ никакого сопротивленія и можемъ легко описать полукругъ CKD или сдѣлать нѣсколько поворотовъ.

178. Такіе опыты со связанными жироскопами представляютъ, пожалуй, наиболѣе поразительное явленіе въ этой области. Жироскопъ потерялъ прежнее упорство и дѣлается послушнымъ; обойма его поворачивается безъ сопротивленія. Иногда стараются свести всѣ явленія жироскопа къ слѣдующему принципу: „плоскость вращенія жироскопа устойчива и стремится сохранить свое направленіе, сопротивляется всякому измѣненію своего направленія". Мы видимъ, что этотъ принципъ совершенно не примѣнимъ къ только что разсмотрѣннымъ связаннымъ жироскопамъ. Здѣсь плоскость вращенія не оказываетъ никакого сопротивленія измѣненію своего направленія. Слѣдовательно этотъ принципъ не общій; онъ не содержитъ въ себѣ описанія всѣхъ явленій жироскопа; нѣкоторыя явленія подходятъ подъ этотъ принципъ, другія рѣшительно противурѣчатъ ему.

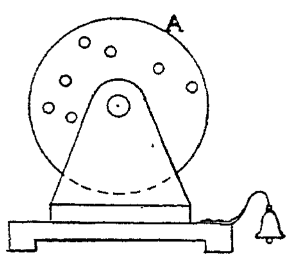
179. Общимъ механическимъ принципомъ, пригоднымъ для истолкованія всѣхъ жироскопическихъ явленій, служитъ теорема Резаля. Примѣнимъ ее къ случаю фиг. 140. Пусть также, какъ въ n° 172, $O\alpha$ изображаетъ величину момента количествъ движенія по оси OX. Положимъ, что обойма идетъ по кругу DKC, по направленію стрѣлки. Тогда перемѣщеніе полюса $\alpha\alpha'$ даетъ проекцію на ось Z; слѣд. по теоремѣ Резаля должна существовать внѣшняя пара, дающая моментъ около оси Z. Прежде (въ n° 172) эта пара представлялась силами Q, Q, на концахъ рукоятки C, D. Но теперь этихъ силъ нѣтъ; отсутствіе ихъ указывается ощущеніемъ нашихъ рукъ, производящихъ поворотъ и не встрѣчающихъ сопротивленія. Между тѣмъ теорема указываетъ, что должна существовать внѣшняя пара,

имѣющая осью линію OZ и моментомъ—проекцію скорости полюса на OZ. Гдѣ же эта пара приложена? Такъ какъ она внѣшняя, то можетъ дѣйствовать только въ мѣстахъ прикосновенія нашей обоймы къ внѣшнимъ предметамъ. Вспомнимъ о неподвижной подставкѣ, въ которой вращаются цапфы E, F. Прежде ея не было, а теперь она существуетъ и можетъ оказывать давленія на цапфы E, F. Ясно, что теперь въ подшипникахъ должны появиться давленія R, перпендикулярныя къ цапфамъ и образующія ту пару, которая необходима для объясненія явленія. Совершенно аналогично этому въ жироскопѣ Бонненбергера появятся давленіи на цапфы C, D.

Давленія на цапфы относятся къ разряду пассивныхъ силъ; онѣ не производятъ механической работы. Но вѣдь совершенно таковы же были и силы Q, указанныя въ n° 172; разницы нѣтъ.

Такимъ образомъ явленія связаннаго жироскопа вполнѣ объясняются, и ничего парадоксальнаго здѣсь нѣтъ. Если это явленіе съ перваго раза поражаетъ насъ, то только потому, что присутствіе силъ R незамѣтно. Но если нужно, то можно опытомъ обнаружить ихъ и даже измѣрить ихъ величину. Вообще это явленіе нисколько не удивительнѣе, напр., слѣдующаго опыта, который часто демонстрируется *).

На деревянномъ столикѣ расположена горизонтальная ось съ колесомъ A (фиг. 141), силы инерціи котораго хорошо уравновѣшены; при быстромъ вращеніи колеса не получается ударовъ и сотрясеній. Но если мы намѣренно нарушимъ уравновѣшеніе, вставляя грузики въ дырочки колеса, то появляются сильные удары, сотрясенія, колокольчикъ, придѣланный къ столику звонитъ, столикъ прыгаетъ и т. д.; этимъ указывается на существованіе неуравновѣшенныхъ силъ инерціи. Теперь стѣснимъ свободу столика, для чего нагрузимъ его тяжелыми гирями или притянемъ его болтами къ фундаменту. Сотрясенія прекращаются, колокольчикъ не звонитъ. Однако силы инерціи остались прежнія; мы только не замѣчаемъ видимыхъ признаковъ



Фиг. 141.

*) Онъ описанъ въ Экспериментальной Механикѣ Болла, а эта книга довольно распространена въ русскихъ среднихъ техническихъ школахъ. Одна изъ этихъ школъ изготовила всю серію приборовъ Болла и экспонировала ихъ на выставкѣ техническаго съѣзда 1903—1904 г.

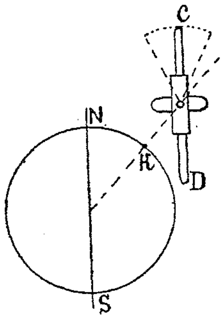
ихъ присутствія, потому что онѣ уничтожаются реакціями, на которыя мы необращаемъ вниманія, такъ какъ онѣ дѣйствуютъ въ неподвижныхъ точкахъ. Аналогично этому мы не замѣчаемъ силъ R въ связанномъ жироскопѣ.

181. *Направляющая пара.* И такъ отличіе связаннаго жироскопа отъ свободнаго состоитъ въ томъ, что въ первомъ возможна передача пары силъ отъ подставки на жироскопъ, а во второмъ это не можетъ быть. Напр., поворачивая около вертикальной оси подставку свободнаго жироскопа (фиг. 134), мы нисколько не измѣняемъ движеніе его оси. Но такой поворотъ оказываетъ дѣйствіе на связанный жироскопъ и заставляетъ ось его AB стать вертикально. Отъ подставки на связанный жироскопъ передается направляющая пара, устанавливающая ось его извѣстнымъ образомъ.

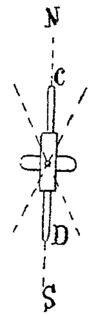
Обращаясь къ прежней фиг. 140, видимъ, что оправа жироскопа будетъ поворачиваться около оси цапфъ EF только тогда, когда внѣшняя пара имѣетъ слагающую, направленную по оси Z. Дѣйствительно при поворотѣ около оси EF получается проекція скорости полюса α на ось Z, слѣд. должна присутсвтовать внѣшняя пара, моментъ которой идетъ по оси Z. Это и будетъ направляющая, устанавливающая пара. Движеніе полюса по оси Z будетъ продолжаться пока существуетъ такая внѣшняя пара; съ исчезновеніемъ пары, произойдетъ остановка полюса, и прекратится поворачиваніе оправы жироскопа. Слѣдовательно эта оправа будетъ останавливаться въ такомъ положеніи, при которомъ внѣшней пары или вовсе нѣтъ, или ось этой пары расположена въ плоскости XY, т. е. въ плоскости, опредѣляемой осью жироскопа AB и осью цапфъ EF.

182. *Дѣйствіе вращенія земли на связанный жироскопъ.* Подставка жироскопа стоитъ на землѣ и участвуетъ въ ея вращеніи. Отъ этого появляется направляющая пара, которая устанавливаетъ ось жироскопа по опредѣленному направленію, согласно тому правилу, которое объяснено въ предъидущемъ n°.

Пусть NS (фиг. 142) ось земли; жироскопъ, имѣющій такую же оправу какъ на фиг. 140, стоитъ въ какомъ-нибудь мѣстѣ K поверхности земли. Подставка жироскопа стоитъ на землѣ и участвуетъ въ ея вращеніи; движеніе подставки можно считать состоящимъ изъ поступательнаго, которое для всѣхъ точекъ тождественно съ движеніемъ точки K, и изъ вращенія около оси параллельной земной оси. Для насъ интересно только это вращенiе; оно вызываетъ давленiе на цапфы, образующее направляющую пару; ось ея параллельна земной оси. На основанiи выведеннаго въ предъидущемъ n°, не трудно получить слѣдующiя заключенiя относительно явленiй, которыя покажетъ связанный жироскопъ, имѣющiй такое устройство, какъ на фиг. 140.



Фиг. 142.



Фиг. 14 2bis.

A) Первая установка. Расположимъ ось цапфъ EF горизонтально и перпендикулярно къ плоскости меридiана. Тогда линiя CO можетъ поворачиваться въ плоскости меридiана.

Дѣйствiемъ направляющей пары, ось которой параллельна оси земли, жироскопъ установится такъ, что прямая CD станетъ параллельно оси земли (фиг. 142).

B) Вторая установка. Ось цапфъ EF установлена вертикально, такъ что линiя жироскопа можетъ поворачиваться въ горизонтальной плоскости.

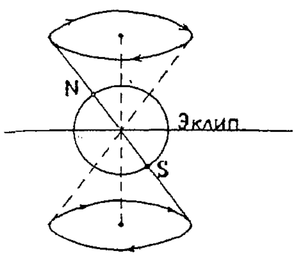
Дѣйствiемъ направляющей пары линiя CD установится въ плоскости меридiана (фиг. 142 bis).

Такимъ образомъ несвободный жироскопъ, вслѣдствiе дѣйствiя вращенiя земли на его подставку, устанавливается подобно магнитной стрѣлкѣ. Этимъ явленiемъ можно пользоваться какъ однимъ изъ доказательствъ вращенiя земли.

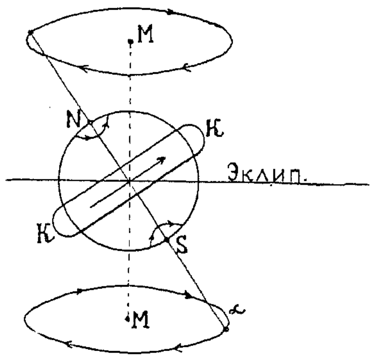
183. Мы ограничиваемся этими примѣрами жироскопическаго движенiя, въ самомъ простомъ его видѣ. Они далеко не исчерпываютъ вопросъ; существуетъ еще много разнообразныхъ конструкцiй жироскоповъ, представляющихъ очень интересныя явленiя. Для всѣхъ ихъ теорема Резаля даетъ значительное освѣщенiе и часто полное объясненiе вопроса; основное требованiе—это согласiе скорости движенiя полюса съ моментомъ внѣшней пары. Смотря съ этой точки зрѣнiя, мы увидимъ, что явленiя, казавшiяся съ перваго взгляда парадоксальными, должны быть признаны вполнѣ естественными и необходимо вытекающими изъ основного закона Механики—Закона Моментовъ Количествъ Движенiя. Это относится къ жироскопу Арди, жиростатамъ В. Томсона, эквилибристу Сира (pied equilibriste); даже поразительныя явленiя периметрическаго волчка Сира находятъ себѣ этимъ путемъ объясненiя.

184. *Астрономическая прецессія и нутація.* Эти явленія движенія земли вполнѣ объясняются и изображаются теоремой Резаля; они представляютъ ничто иное, какъ движеніе полюса (т. е. конца оси моментовъ количествъ движенія), происходящее отъ дѣйствія внѣшней пары и вполнѣ согласующееся съ послѣдовательными измѣненіями оси этой пары. Полюсъ своей скоростью точно копируетъ измѣненія момента пары.

Прецессія, какъ извѣстно, состоитъ въ томъ, что ось земли (фиг. 143), сохраняя свое наклоненіе къ плоскости эклиптики, описываетъ круговой конусъ около перпендикуляра къ плоско-



Фиг. 143.



Фиг. 144.

сти эклиптики; это коническое движеніе очень медленно, и для полнаго оборота требуется около 26000 лѣтъ.

Еще Ньютонъ указалъ, что причиной прецессіи является отступленіе фигуры земли отъ шарообразной формы. Земля сплющена у полюсовъ и представляетъ избытокъ матеріала у экватора. Мы можемъ считать, что къ правильному шару какъ будто бы сдѣлана дополнительная прибавка (сфероидальный избытокъ) въ родѣ кольца KK, надѣтаго на экваторъ и представленнаго для ясности въ искаженномъ видѣ на фиг. 144. Ньютонъ объяснилъ прецессію дѣйствіемъ притяженія луны и солнца на это дополнительное кольцо.

Замѣтимъ, что прецессіонное движеніе происходитъ очень медленно по сравненію съ суточнымъ вращеніемъ земли около оси; полный оборотъ прецессіи требуетъ время около 26000 л.

Слѣдовательно, если примѣнимъ наше разложеніе угловой скорости вращенія на двѣ скорости—одну по оси фигуры, а другую по одной изъ осей, лежащихъ въ плоскости экватора,—то вторая изъ этихъ скоростей значительно меньше первой.

Поэтому ось моментовъ количествъ движенія почти совпадаетъ съ осью фигуры земли. Разсмаривая результаты наблюденій надъ движеніемъ земли, мы можемъ допустить совпаденіе этихъ осей. Полюсъ, т. е. конецъ оси моментовъ количествъ движенія, будетъ нѣкоторая точка α, лежащая на земной оси. Зная направленіе вращенія земли около оси (оно показано стрѣлками у полюсовъ), мы видимъ, что точка α должна приходиться со стороны южнаго полюса. Дѣйствительно, при такомъ положеніи α, если мы, стоя у этой точки, будемъ смотрѣть на землю, то увидимъ ее вращающейся въ сторону часовой стрѣлки.

Итакъ астрономическія наблюденія указываютъ намъ на круговое движеніе полюса α.

По теоремѣ Резаля это движеніе вызывается соотвѣтствующей внѣшней парой, и легко показать, что притяженіе луны и солнца на дополнительное кольцо земли даютъ именно такую пару.

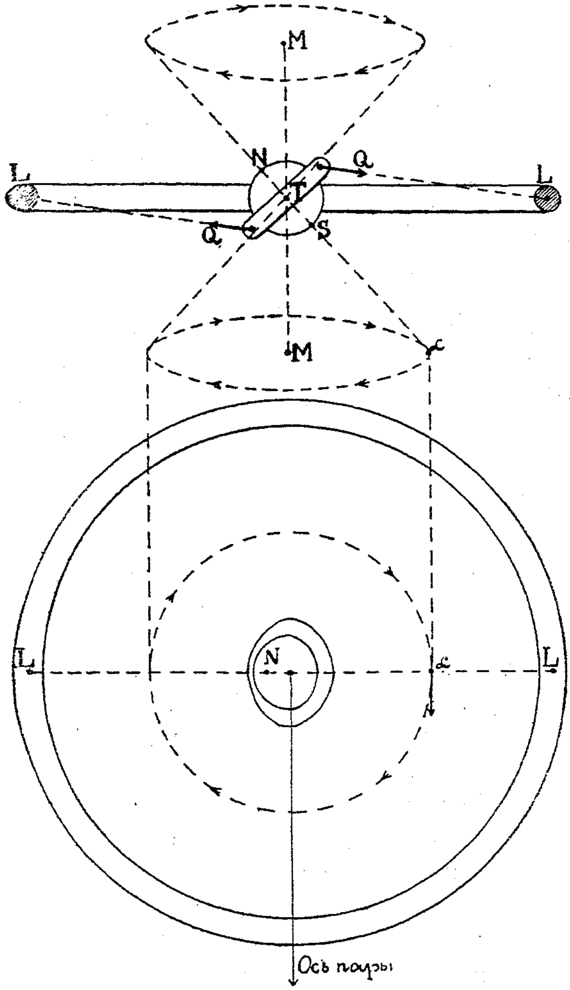
Разсмотримъ притяженіе луны, которая вслѣдствіе своей близости къ землѣ играетъ въ прецессіи бо́льшую роль, чѣмъ солнце *).

Разбирая это притяженіе, мы можемъ, вмѣсто истиннаго движенія, разсматривать относительное движеніе, т. е. землю будемъ считать неподвижной, а луну—описывающей почти круговую орбиту около земли. Для простоты пренебрежемъ наклономъ плоскости орбиты луны къ плоскости орбиты земли и будемъ считать, что орбита луны совпадаетъ съ эклиптикой.

Двигаясь по своей орбитѣ, луна въ теченіи одного обращенія послѣдовательно измѣняетъ свое положеніе, и, строго говоря, надлежало бы разобрать дѣйствіе ея на землю для этихъ различныхъ положеній. Но, пользуясь тѣмъ, что полное время обращенія луны (одинъ мѣсяцъ) гораздо меньше, чѣмъ періодъ прецессіи (26000 лѣтъ), мы можемъ ввести упрощеніе, аналогичное тому, которое примѣняется при вычисленіи вѣковыхъ возмущеній планетъ. А именно—вмѣсто движущейся луны введемъ неподвижное кольцо, которое имѣетъ форму орбиты луны, и на этомъ кольцѣ распредѣлимъ равномѣрно массу луны; самое кольцо будемъ считать круговымъ, т. е. пренебрежемъ эксцентриситетомъ орбиты. Притяженіе этого луннаго кольца LL (фиг. 145) на дополнительное кольцо KK земли даетъ пару силъ Q, Q; ось ея лежитъ въ плоскости орбиты луны и перпендикулярна къ оси фигуры земли.

*) Прецессія отъ вліянія луны слишкомъ въ два раза превышаетъ прецессію, производимую солнцемъ.

Положеніе оси пары можно опредѣлить еще слѣдующимъ образомъ: назовемъ перпендикуляръ TM къ плоскости лунной



Фиг. 145.

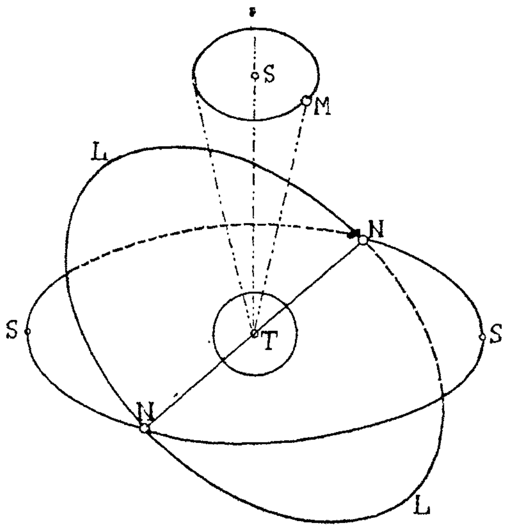
орбиты—осью этой орбиты. Ось пары QQ будетъ линія, перпендикулярная къ оси земли и къ оси лунной орбиты.

Теперь, разсматривая происходящую прецессію, мы видимъ, что ось указанной пары вполнѣ соотвѣтствуетъ скорости полюса α, и слѣд. прецессія получаетъ свое естественное объясненіе.

Подобно лунѣ дѣйствуетъ и солнце.

185. ***Нутація.*** Мы считали въ видѣ перваго приближенія, что плоскость лунной орбиты совпадаетъ съ плоскостью эклип-

тики. Теперь введемъ поправку; эти двѣ плоскости наклонены между собою подъ угломъ около 5° градусовъ и пересѣкаются по нѣкоторой линіи, называемой линіей узловъ (NN на фиг. 146).



Фиг. 146.

Наклонъ лунной орбиты мало измѣняется съ теченіемъ времени, и можно не обращать вниманія на это измѣненіе. Но гораздо существеннѣе измѣненіе линіи узловъ. Она постепенно перемѣщается, вращаясь около центра земли T, и дѣлаетъ полный оборотъ въ $18^1/_2$ лѣтъ (приблизительно).

Можно описать это явленіе, сказавши, что перпендикуляръ къ лунной орбитѣ TM описываетъ конусъ около оси эклиптики TS, употребляя на полный оборотъ $18^1/_2$ лѣтъ *).

Но мы видѣли, что ось пары, которая производитъ прецессію, перпендикулярна къ линіи TM и къ оси земли. Слѣд. эта ось пары получаетъ періодическое измѣненіе своего положенія съ періодомъ $18^1/_2$ лѣтъ.

Такое измѣненіе оси пары должно отозваться, по теоремѣ Резаля, на движеніи полюса, которое принуждено согласоваться съ измѣненіями оси внѣшней пары. Поэтому полюсъ долженъ описывать не правильный кругъ, а волнистую линію съ періодомъ волнъ въ $18^1/_2$ лѣтъ. Соотвѣтственно этимъ волнамъ, земная ось въ своемъ коническомъ движеніи получаетъ колебанія по 9 секундъ въ ту и другую сторону, то приближаясь къ оси конуса, то удаляясь отъ него. Это явленіе называется нутаціей; оно было открыто изъ наблюденій Брэдлеемъ въ 1747 году. Для насъ это явленіе представляетъ интересный примѣръ приложенія теоремы Резаля **).

---

*) Такое движеніе узловъ лунной орбиты вызывается возмущающимъ дѣйствіемъ солнца на движеніе луны.

**) О прецессіи и нутаціи съ динамической точки зрѣнія см. въ указанной книгѣ: Klein und Sommerfeld. Theorie des Kreisels. III. Heft.

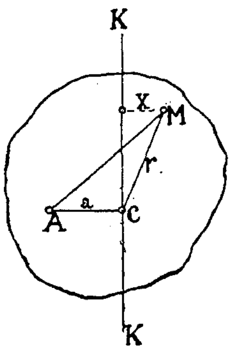
ПРИБАВЛЕНІЕ КЪ ОДИННАДЦАТОЙ БЕСѢДѢ.

Моменты инерціи. Главныя оси.

186. Моментомъ инерціи какого нибудь тѣла, относительно нѣкоторой оси, называется сумма произведеній изъ массъ частицъ, составляющихъ тѣло, на квадраты ихъ разстояній до этой оси. Мы видѣли, что такое выраженіе появляется во всѣхъ вопросахъ, касающихся вращенія тѣла.

Оси вращенія могутъ имѣть разнообразное положеніе относительно тѣла, а съ измѣненіемъ оси перемѣняется и моментъ инерціи. Такимъ образомъ для даннаго тѣла мы имѣемъ не одинъ моментъ инерціи, а цѣлую группу ихъ, отвѣчающую комплексу всевозможныхъ осей, которыя можно себѣ вообразить въ различныхъ положеніяхъ и по различнымъ направленіямъ относительно тѣла. Величины моментовъ инерціи такой группы находятся между собою въ извѣстныхъ соотношеніяхъ, позволяющихъ съ легкостью опредѣлить значительную часть моментовъ, когда извѣстны нѣкоторые изъ нихъ. Мы займемся выводомъ этихъ соотношеній.

187. ***Первая теорема. Связь между моментами инерціи для параллельныхъ осей.*** Пусть (фиг. 148) имѣемъ двѣ оси; одна изъ нихъ (первая) проходитъ черезъ центръ тяжести тѣла C; другая (вторая)—параллельна первой и находится отъ нея на разстояніи AC, которое назовемъ a. Возьмемъ любую частицу тѣла M; пусть масса ея будетъ m; разстоянія ея отъ первой и второй осей назовемъ r и ρ. Обозначая буквой Σ суммированіе, распространенное на все тѣло, получимъ:



Фиг. 148.

моментъ инерціи для первой оси

$$I_1 = \Sigma m r^2;$$

моментъ инерціи для второй оси:

$$I_2 = \Sigma m \rho^2.$$

Черезъ первую ось проведемъ плоскость KK, перпендикулярную къ AC, и разстояніе частицы M отъ этой плоскости назовемъ x.

Изъ треугольника MAC получаемъ:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 + 2a.x.$$

Слѣдовательно

$$I_2 = \Sigma mr^2 + \Sigma ma^2 + \Sigma 2ax.m.$$

Вынося изъ-подъ знаковъ Σ тѣ множители, которые одинаковы для всѣхъ членовъ суммы, получаемъ

$$I_2 = \Sigma mr^2 + a^2 \Sigma m + 2a\Sigma mx.$$

Первый членъ этого выраженія представляетъ моментъ инерціи для первой оси I_1. Во второмъ входитъ сумма массъ всѣхъ частицъ тѣла Σm, т. е. полная масса всего тѣла M. Затѣмъ въ третьемъ членѣ входитъ сумма

$$\Sigma mx,$$

которая, по опредѣленію понятія „центръ тяжести", равна нулю. Поэтому получимъ:

$$I_2 = I_1 + M.a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (55),$$

т. е. моментъ инерціи для какой нибудь оси равенъ суммѣ двухъ величинъ: a) момента инерціи для параллельной оси, проведенной черезъ центръ тяжести, b) произведенія изъ массы тѣла на квадратъ разстоянія между этими двумя осями.

188. Эта теорема позволяетъ въ случаѣ параллельныхъ осей ограничиться нахожденіемъ момента инерціи для одной изъ нихъ; для всѣхъ остальныхъ моменты инерціи прямо получаются изъ уравненія 55.

189 Уравненіе (55) показываетъ, что, среди параллельныхъ осей, наименьшій моментъ инерціи получается для той изъ нихъ, которая проходитъ черезъ центръ тяжести тѣла.

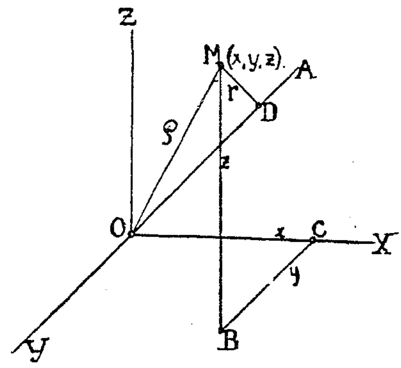
190. *Зависимость между моментами инерціи для осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку тѣла.* Эту точку O примемъ за начало координатной системы

(фиг. 149). Пусть OA будетъ одна изъ осей; направленіе ея опредѣляется углами α, β, γ, которыя она составляетъ съ осями X, Y, Z. Возьмемъ одну изъ частицъ тѣла M; координаты ея назовемъ x, y, z, массу частицы обозначимъ черезъ m. Опуская перпендикуляръ изъ M на ось OA, получимъ разстояніе MD этой частицы до оси; его назовемъ черезъ r, а длину MO черезъ ρ. Моментъ инерціи тѣла для оси OA будетъ

$$I = \Sigma m r^2.$$

Здѣсь мы имѣемъ слѣдующія геометрическія соотношенія:

$$r^2 = \rho^2 - \overline{OD}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \overline{OD}^2.$$



Фиг. 149.

Разсматривая замкнутый многоугольникъ ODMBCO и проектируя всѣ стороны его на ось AO, получимъ

$$OD = x. \operatorname{Cos} \alpha + y. \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma.$$

Слѣдовательно

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \operatorname{Cos} \alpha + y. \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma)^2 \quad . \; . \; . \; . \; (56).$$

По извѣстному соотношенію между косинусами угловъ, образуемыхъ прямой съ осями координатъ, имѣемъ

$$I = \operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\gamma;$$

поэтому уравненіе (56) можно написать въ формѣ:

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) (\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\gamma) -$$
$$- (x. \operatorname{Cos}\alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma)^2.$$

Производя возвышеніе трехчлена въ квадратъ и сокращая, найдемъ окончательно:

$$r^2 = \operatorname{Cos}^2\alpha \; (y^2 + z^2) + \operatorname{Cos}^2\beta \; (x^2 + z^2) + \operatorname{Cos}^2\gamma \; (x^2 + y^2) -$$
$$- 2. \operatorname{Cos} \gamma. \operatorname{Cos} \beta. yz - 2 \operatorname{Cos} \alpha. \operatorname{Cos} \gamma. xz - 2. \operatorname{Cos} \alpha. \operatorname{Cos} \beta \; x.y.$$

Это выраженіе нужно умножить на m, и произвести суммированіе для всего тѣла. Такъ какъ косинусы угловъ α, β, γ одинаковы для всѣхъ членовъ суммы, то ихъ можно вынести изъ подъ знака Σ, и мы получимъ моментъ инерціи въ такой формѣ:

$$I = \mathrm{Cos}^2\alpha\ \Sigma m\ (z^2 + y^2) + \mathrm{Cos}^2\beta\ \ \Sigma m\ (x^2 + z^2) + \mathrm{Cos}^2\gamma\ \ \Sigma m (x^2 + y^2)$$
$$- 2.\mathrm{Cos}\ \gamma\ \mathrm{Cos}\ \beta.\Sigma myz - 2.\mathrm{Cos}\ \alpha.\mathrm{Cos}\ \gamma.\Sigma mxz - 2.\mathrm{Cos}\ \alpha.\mathrm{Cos}\ \beta\ \Sigma mxy.$$

Для краткости письма назовемъ каждую изъ суммъ, входящихъ въ это выраженіе, одной буквой; тогда получимъ:

$$I = a.\mathrm{Cos}^2\alpha + b.\mathrm{Cos}^2\ \beta + c.\mathrm{Cos}^2\ \gamma -$$
$$- 2.\mathrm{Cos}\ \gamma.\mathrm{Cos}\ \beta.d - 2.\mathrm{Cos}\ \alpha.\mathrm{Cos}\ \gamma.e - 2.\mathrm{Cos}\ \alpha.\mathrm{Cos}\ \beta.\ f\ .\ .\ .\ (57).$$

Здѣсь буквы a, b . . . f имѣютъ слѣдующія значенія:

$$a = \Sigma m\ (y^2 + z^2);\quad b = \Sigma m\ (x^2 + z^2);\quad c = \Sigma m\ (x^2 + z^2)$$
$$d = \Sigma myz \qquad\qquad e = \Sigma mxz \qquad\qquad f = \Sigma mxy.$$

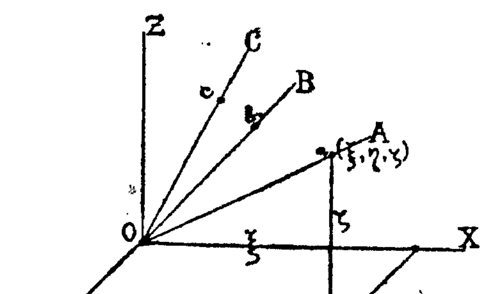
Такъ какъ выраженіе

$$y^2 + z^2$$

есть разстояніе точки M отъ оси X, то, очевидно, коеффиціентъ a есть моментъ инерціи тѣла относительно оси X. Подобно этому b и c представляютъ моменты инерціи относительно осей Y и Z. Величины d, e, f изображаютъ такъ называемые центробѣжные моменты.

Достаточно знать эти шесть величинъ a, b, c, d, e, f; тогда по формулѣ (57) найдемъ моментъ инерціи для любой оси OA, положеніе которой опредѣляется углами α, β, γ.

Итакъ вопросъ объ опредѣленіи моментовъ инерціи для всевозможныхъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, получаетъ довольно простое рѣшеніе. Шесть величинъ опредѣляютъ всю сложную совокупность такой группы моментовъ инерціи.



Фиг. 150.

194. ***Геометрическое изображеніе этого результата.*** Для изображенія того, какъ измѣняются моменты инерціи для разныхъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, примѣнимъ слѣдующій пріемъ (фиг. 150). На

каждой изъ осей OA, OB, OC . . . отложимъ отрѣзокъ (oa, ob, oc . . .), представляющій величину

$$\frac{I}{\sqrt{I}},$$

т. е. величину, обратную корню квадратному изъ момента инерціи для этой оси. Концы a, b, c . . .—этихъ отрѣзковъ образуютъ нѣкоторую поверхность, которая будетъ служить нагляднымъ указателемъ измѣняемости моментовъ инерціи.

Опредѣлимъ видъ этой поверхности, для чего составимъ ея уравненіе. Пусть ось OA составляетъ съ координатными осями X, Y, Z углы α, β, γ; координаты точки a, т. е. конца отрѣзка Oa, равнаго

$$\frac{I}{\sqrt{I}},$$

назовемъ ξ, η, ζ; это будутъ координаты искомой поверхности, указывающей законъ измѣненія моментовъ инерціи. По извѣстнымъ формуламъ Аналитической Геометріи, имѣемъ:

$$\xi = \overline{Oa}.\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{I}{\sqrt{I}}.\mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$\eta = \overline{Oa}.\mathrm{Cos}\,\beta = \frac{I}{\sqrt{I}}.\mathrm{Cos}\,\beta$$

$$\zeta = \overline{Oa}.\mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{I}{\sqrt{I}}.\mathrm{Cos}\,\gamma.$$

Опредѣлимъ отсюда

$$\mathrm{Cos}\,\alpha,\ \mathrm{Cos}\,\beta,\ \mathrm{Cos}\,\gamma$$

и вставимъ въ уравненіе (57). Получимъ, по сокращеніи на I:

$$1 = a\,\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 - 2d\eta\zeta - 2e\xi\zeta - 2f\xi\eta \quad . \; . \; . \; . \; (58).$$

Эта зависимость между координатами ξ, η, ζ, представляетъ уравненіе искомой поверхности. Оказывается, что мы имѣемъ поверхность 2-го порядка.

Къ этому прибавимъ то соображеніе, что ни для одной изъ осей моментъ инерціи не можетъ быть нулемъ, такъ какъ онъ есть сумма положительныхъ членовъ. Поэтому ни одинъ изъ отрѣзковъ Oa, Ob, Oc—не можетъ быть безконечностью. И такъ мы имѣемъ дѣло съ поверхностью 2-го порядка, не имѣющей ни одной безконечно отдаленной точки. Слѣдовательно это навѣрное эллипсоидъ.

Такимъ образомъ мы получимъ замѣчательный общій выводъ:

Измѣненіе моментовъ инерціи для осей, проходящихъ черезъ одну точку, всегда представляется поверхностью эллипсоида, какова бы ни была форма тѣла и расположеніе массъ, его составляющихъ.

192. *Преобразованіе уравненія эллипсоида.* Измѣняя направленіе осей координатъ, мы всегда можемъ упростить уравненіе эллипсоида, и уничтожить въ немъ члены съ произведеніями координатъ. Дѣлая это извѣстное преобразованіе Эйлера, получимъ уравненіе эллипсоида въ формѣ:

$$1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\gamma^2, \ldots \ldots \ldots (59).$$

Новыя координатныя оси будутъ направлены по осямъ эллипсоида. Сравнивая это уравненіе съ (58), находимъ, что вслѣдствіе перемѣны координатныхъ осей, получились слѣдующія измѣненія:

1) Величины a, b, c превратились въ A, B, C. Но a, b, c были моменты инерціи для прежнихъ осей координатъ. Теперь A, B, C будутъ моменты инерціи для новыхъ координатныхъ осей.

2) Величины d, e, f обратились въ нули. Но эти величины изображаютъ суммы

$$\Sigma mzy, \Sigma mxz, \Sigma mxy.$$

Слѣдовательно при новыхъ осяхъ такія суммы равны нулю.

Этотъ выводъ показываетъ, что для всякаго тѣла можно найти такое направленіе координатныхъ осей, при которомъ выполнены условія:

$$\Sigma mzy = 0, \Sigma mxz, = 0, \Sigma mzy = 0 \ldots \ldots (60).$$

193. Въ 5-й бесѣдѣ (n° 82) мы дали слѣдующее опредѣленіе:

Ось, удовлетворяющая тому условію, что для нея оказываются нулями двѣ суммы, которыя содержатъ координату x, т. е.

$$\Sigma mxz = 0, \Sigma mxy = 0,$$

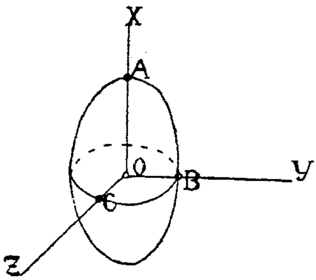
называется главною осью. Условія (60) показываютъ, что у насъ не только ось X, но и двѣ другія оси Y, Z суть главныя оси. И такъ въ каждой точкѣ всякаго тѣла имѣются три главныхъ оси, взаимно перпендикулярныя. Моменты инерціи для нихъ называются главными моментами инерціи.

194. *Частный случай.* Пусть имѣемъ:

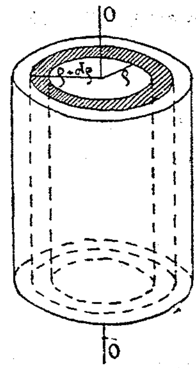
$$B=C$$

т. е. если два главныхъ момента инерціи равны между собою.

Тогда эллипсоидъ (урав. 59) будетъ эллипсоидомъ вращенія (фиг. 151). При этомъ получается равенство нетолько мо-



Фиг. 151.



Фиг. 152.

ментовъ инерціи для осей Y, Z, но и для всякой оси лежащей въ плоскости YZ моментъ инерціи будетъ тоже равенъ B. Всѣ эти оси будутъ главными осями тѣла.

Этотъ случай получается напр. для однородныхъ тѣлъ, имѣющихъ геометрическую форму тѣла вращенія. Главными осями такого тѣла будутъ: его ось фигуры и всѣ оси къ ней перпендикулярныя.

195. *Случай когда всѣ три главные момента инерціи равны между собою.*

$$A=B=C.$$

Тогда эллипсоидъ (59) превращается въ шаръ. При этомъ моменты инерціи для всѣхъ осей будутъ равны между собою, и всѣ оси будутъ главныя.

196. *Вычисленіе момента инерціи.* Для этого нужно раздѣлить тѣло на элементарныя части, составить произведеніе изъ массы элемента на квадратъ разстоянія его до оси, и затѣмъ суммировать произведенія. Число ихъ безконечно большое, слѣд. мы будемъ имѣть дѣло съ суммою безконечно большого числа членовъ. Подобныя суммы находятся по правиламъ Интегральнаго Исчисленія.

197. Для примѣра найдемъ моментъ инерціи однороднаго круговаго цилиндра относительно его оси. Пусть радіусъ цилиндра будетъ R, а высота его H (фиг. 152). Раздѣлимъ его на

элементы такого вида: опишемъ изъ центра, взятаго на оси цилиндра, два безконечно близкихъ круга радіусовъ ρ и $\rho+d\rho$, и на нихъ построимъ безконечно тонкую цилиндрическую трубку, простирающуюся по всей длинѣ цилиндра. Всѣ точки такого элемента можно считать находящимися на одинакомъ разстояніи ρ отъ оси цилиндра.

Объемъ элемента будетъ

$$2\pi\rho.d\rho.H.$$

Если назовемъ массу единицы объема черезъ $\triangle$, то масса элемента будетъ:

$$\triangle.2\pi\rho.d\rho.H;$$

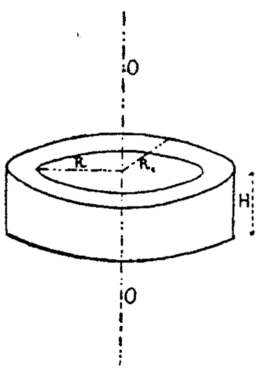
его моментъ инерціи равенъ:

$$\triangle\, 2\pi\rho.d\rho.H.\rho^2 = 2\pi\triangle.H.\rho^3 d\rho \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (61).$$

Весь цилиндръ можно считать состоящимъ изъ такихъ элементовъ. Суммируемъ выраженія (61); это приведется къ нахожденію опредѣленнаго интеграла въ предѣлахъ отъ радіуса равнаго нулю до радіуса R.

Искомый моментъ инерціи будетъ.

$$I=\int_0^R 2\pi\triangle H.\rho^3.d\rho=\frac{\pi.\triangle.H.R^4}{2}$$



Фиг. 153.

199. Если имѣемъ цилиндрическое кольцо, напр., ободъ маховаго колеса (фиг. 153), то моментъ инерціи его получится какъ разность моментовъ инерціи двухъ цилиндровъ—наружнаго съ радіусомъ R_1 и внутренняго съ радіусомъ R.

200. ***Опредѣленіе моментовъ инерціи опытомъ по времени качанія маятника.*** Въ n° 65 мы видѣли, что время качанія сложнаго маятника опредѣляется формулой

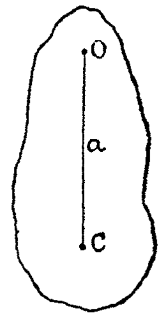
$$t=2\pi\sqrt{\frac{I}{Ma}},$$

гдѣ I моментъ инерціи тѣла относительно оси каченія O (фиг. 155); M—масса тѣла; a—разстояніе центра тяжести тѣла C отъ оси качанія. Поэтому, если заставимъ тѣло качаться около оси O, и найдемъ время качанія t, то можемъ вычислить моментъ инерціи его относительно оси O.

201. Примѣненіе этого пріема возможно только для осей не проходящихъ черезъ центръ тяжести. Дѣйствительно, если бы ось O проходила черезъ центръ тяжести, то имѣли бы:

$$a = 0, \text{ слѣд. } t = \infty.$$

Но, найдя моментъ инерціи для оси O не проходящей черезъ центръ тяжести, мы сейчасъ же можемъ вычислить моментъ инерціи для параллельной ей оси, проведенной черезъ центръ тяжести. Для этого послужитъ форм. 55.



Фиг. 155.

202. *Видоизмѣненіе этого пріема.* Вмѣсто того, чтобы для опредѣленія момента инерціи каждаго изслѣдуемаго тѣла придѣлывать къ нему ось качанія, удобнѣе организовать опыты въ слѣдующей формѣ. Имѣется готовый приборъ, состоящій изъ нѣкотораго постояннаго маятника, время качанія котораго и его моментъ инерціи заранѣе опредѣлены. Къ этому маятнику могутъ быть прикрѣплены тѣ тѣла, моментъ инерціи которыхъ требуется найти. Вслѣдствіе прикрѣпленія тѣла къ маятнику, время качанія будетъ отличное отъ первоначальнаго. Опытъ дастъ намъ сумму моментовъ инерціи первоначальнаго прибора и прикрѣпленнаго къ нему тѣла. А такъ какъ моментъ инерціи прибора извѣстенъ, то вычитаніемъ найдемъ моментъ инерціи прикрѣпленнаго тѣла.

Укрѣпляя это тѣло въ приборѣ въ разныхъ положеніяхъ, можемъ найти моменты инерціи его для разныхъ осей.

203. *Опредѣленіе эллипсоида инерціи тѣла.* Этотъ эллипсоидъ будетъ вполнѣ извѣстенъ если мы найдемъ шесть коеффиціентовъ уравненія (57), т. е.

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f.$$

Для этого нужно сдѣлать шесть опытовъ, заставляя тѣло качаться около шести различныхъ осей, и опредѣляя для каждой изъ нихъ моменты инерціи. Вставляя въ (57) величину момента инерціи и соотвѣтствующія значенія угловъ оси α, β, γ, мы получимъ по одному уравненію для каждаго опыта. Всего будетъ шесть уравненій, изъ которыхъ найдемъ шесть величинъ

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f.$$

204. *Частный случай.* Для тѣлъ вращенія достаточно найти моментъ инерціи относительно двухъ осей: оси фигуры и оси къ ней перпендикулярной. Этимъ опредѣляется эллипсоидъ инерціи.

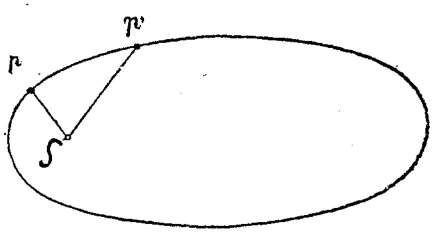
205. *Примѣчаніе.* Опредѣливъ положеніе эллипсоида инерціи въ тѣлѣ, мы будемъ знать положеніе главныхъ осей тѣла. Слѣд. изложенное въ n° n° 203, 204 даетъ способъ для нахожденія главной оси тѣла, т. е. рѣшаетъ задачу, часто встрѣчающуюся при изготовленіи быстро вращающихся частей машинъ. Но это рѣшеніе очень неудобно для практическаго примѣненія, и имъ никогда не пользуются. Взамѣнъ того на заводахъ производятъ уравновѣшеніе вращающихся частей такъ, какъ это описано у насъ въ n° 84.

ДВѢНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

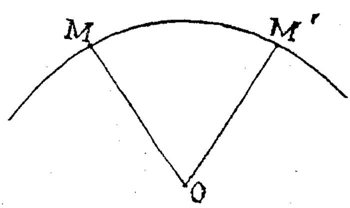
Законъ площадей.

206. Законъ Моментовъ Количествъ Движенія, служившій предметомъ двухъ предъидущихъ бесѣдъ, можетъ быть представленъ въ другой формѣ, которая иногда очень удобна для описанія нѣкоторыхъ механическихъ явленій. Эта новая форма прежняго закона—есть законъ площадей.

Съ понятіемъ о площади, описываемой движущимся тѣломъ, мы встрѣчаемся первый разъ въ механикѣ матеріальной точки, разбирая движеніе планетъ вокругъ солнца. По первому закону Кеплера площадь PSP′ (фиг. 156), описываемая радіусомъ



Фиг. 156.



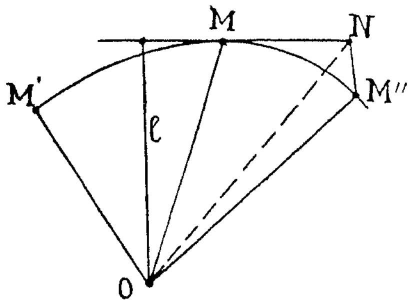
Фиг. 157.

векторомъ PS, идущимъ отъ планеты P къ солнцу S, измѣняется пропорціонально времени. Такое движеніе планеты примемъ за типъ, и посмотримъ, на сколько можно подойти къ этому типу въ общемъ случаѣ движенія.

Для этого нужно прежде всего обобщить понятіе о площади описываемой движущимся тѣломъ. Если имѣемъ плоское движеніе матеріальной точки (фиг. 157) отъ M къ M′, то, выбравъ въ той же плоскости произвольную точку O, можемъ говорить о площади, описываемой точкой M около O, т. е. о секторѣ MOM′. Если у насъ нѣсколько матеріальныхъ точекъ, то нужно принять во вниманіе ихъ массы. Условимся для каждой изъ нихъ брать произведеніе сектора MOM′. на массу точки m, и за произведеніемъ этимъ сохранимъ названіе площади, описываемой точкой около центра O.

Если движеніе точки не плоское, то мы можемъ проектировать его на три координатныя плоскости, и разсматривать каждую проекцію отдѣльно, какъ плоское движеніе. Разсматривая, напр., плоскость XY, будемъ говорить о площади, описываемой около начала координатъ O. Точнѣе будетъ говорить, что эта площадь описывается около оси OZ, перпендикулярной къ плоскости XY.

207. Возьмемъ одну изъ такихъ проекцій (фиг. 158). Начальное положеніе матеріальной точки есть M' (лѣвая точка фигуры); она движется по $M'MM''$, и мы разсматриваемъ площадь, описываемую около точки O. Положимъ, что по прошествіи времени t точка массы m, приходитъ въ M; тогда по нашему опредѣленію площадь, описанная за это время, будетъ произведеніе изъ массы m на площадь сектора $M'OM$; это произведеніе означимъ буквою ω. Затѣмъ предположимъ безконечно малое приращеніе времени Δt; наша точка пройдетъ безконечно малый путь MM'' (M'' есть правая точка фигуры); описываемая ею площадь получитъ безконечно малое приращеніе $\Delta\omega$, которое представляется произведеніемъ изъ m на площадь MOM''.



Фиг. 158.

Припомнимъ слѣдующее разсмотрѣніе безконечно малаго перемѣщенія, часто примѣняемое въ Кинематикѣ при изученіи ускореній. Движеніе MM'' разсматривается какъ составное изъ двухъ. Первое составляющее движеніе есть равномѣрное, идущее по касательной, съ той скоростью V, которую движущаяся масса m имѣла въ точкѣ M; въ этомъ движеніи за время Δt проходится путь, равный

$$V.\Delta t,$$

изображенный на чертежѣ отрѣзкомъ MN. Второе составляющее движеніе (его называютъ девіаціей) есть NM''; съ точностью до величинъ второго порядка, это движеніе можно считать равно ускореннымъ, съ начальной скоростью равной нулю, и съ ускоренiемъ, равнымъ ускоренiю k нашей массы m въ точкѣ M; путь NM″, пройденный въ теченiи времени $\triangle t$, будетъ

$$\frac{1}{2} k. \triangle t^2 \text{ *)}.$$

Разсматривая нашу фигуру, видимъ, что площадь MNM″ есть величина порядка выше перваго, такъ какъ всѣ три стороны ея безконечно малы. Также и площадь ONM″—величина порядка выше перваго, потому что сторона NM″—2-го порядка. Поэтому, ограничиваясь величинами 1-го порядка, мы можемъ считать равными между собою двѣ площади:

1) секторъ OMM″

2) треугольникъ OMN,

и вмѣсто сектора можно взять этотъ треугольникъ. Площадь его будетъ:

$$\frac{1}{2} V . \triangle t . l$$

(l—перпендикуляръ изъ O на касательную MN). Умножая площадь на массу m, получимъ по нашему опредѣленiю:

$$\triangle \omega = \frac{1}{2} mV . l . \triangle t.$$

Но произведенiе

$$mV . l$$

есть моментъ количества движенiя относительно оси, проведенной черезъ O перпендикулярно къ плоскости чертежа. Называя его буквою μ, получаемъ

$$\triangle \omega = \frac{1}{2} \mu . \triangle t.$$

Дѣлимъ на $\triangle t$ и переходимъ къ предѣлу, т. е. постепенно подводимъ $\triangle t$ къ нулю. Предѣлъ дроби

$$\frac{\triangle \omega}{\triangle t}$$

будетъ производная

$$\frac{d\omega}{dt}$$

слѣд. имѣемъ:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} \mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (61),$$

т. е. производная отъ описанной площади по времени равна половинѣ момента количества движенiя.

*) Этотъ способъ разсмотрѣнiя сводится къ тому, что считаютъ ускоренiе постояннымъ на протяженiи пути MM″. Тогда здѣсь можно примѣнить законы движенiя подъ дѣйствiемъ постоянной силы, т. е. законы параболическаго движенiя.

208. Если имѣемъ не одну движущуюся точку, а совокупность ихъ—систему,—то для каждой точки можно написать уравненіе аналогичное (61). Складывая ихъ, получимъ въ лѣвой части производную отъ полной площади, описанной всѣми точками системы, а въ правой части—половину момента количества движенія всей системы. Слѣд. между описанной площадью и моментомъ количествъ движенія въ системѣ существуетъ такая же зависимость, какъ имѣющаяся для одной матеріальной точки.

Обратимся теперь къ общимъ уравненіямъ (53) (въ n° 153), изображающимъ Законъ Моментовъ Количествъ Движенія, и введемъ въ нихъ описанныя площади взамѣнъ Моментовъ Количествъ Движенія. Называя площади описанныя системою на плоскостяхъ координатъ

$$ZOY, \qquad ZOX, \qquad XOY$$

черезъ

$$\Omega_x \qquad \Omega_y \qquad \Omega_z,$$

получимъ эти уравненія въ такой формѣ:

$$\left.\begin{aligned} 2.\frac{d^2\Omega_x}{dt^2} &= M_x \\ 2.\frac{d^2\Omega_y}{dt^2} &= M_y \\ 2.\frac{d^2\Omega_z}{dt^2} &= M_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

Здѣсь M_x, M_y, M_z, моменты внѣшнихъ силъ для осей координатъ. Уравненія (62) выражаютъ прежній законъ, но въ другой формѣ; теперь, вмѣсто разсмотрѣнія Моментовъ Количествъ Движенія, занимаемся площадями, которыя описываютъ точки системы. Эту форму назовемъ Закономъ Площадей.

209. Она особенно удобна въ тѣхъ случаяхъ, когда моментъ внѣшнихъ силъ для какой нибудь изъ осей равенъ нулю. Тогда получимъ соотвѣтствующее уравненіе.

$$2.\frac{d^2\Omega}{dt^2} = O,$$

которое интегрируется и даетъ

$$2.\ \Omega = Ct + C'.$$

Здѣсь C и C' двѣ постоянныя интегрированія. Вторая изъ нихъ всегда можетъ быть приведена къ нулю. Дѣйствительно, она изображаетъ величину площади, уже описанной до начальнаго момента времени. Но мы всегда можемъ условиться считать описанную площадь, начиная съ того положенія системы, когда t равно нулю; это равносильно положенію

$$C' = 0.$$

Тогда имѣемъ

$$\Omega = \frac{C}{2}.t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63),$$

т. е. описанныя площади пропорціональны временамъ. Это представляетъ собою обобщеніе перваго закона Кеплера. Такой результатъ получится, если моментъ внѣшнихъ силъ для избранной нами оси равенъ нулю, т. е. если внѣшнія силы пересѣкаютъ эту ось, или ей параллельны. Мы говоримъ внѣшнихъ силъ, потому что внутреннія силы не входятъ въ наши уравненія и не оказываютъ никакого вліянія на величину площади описываемой системой.

Величина

$$\frac{C}{2}$$

представляетъ площадь, описываемую системой въ единицу времени. Она сохраняетъ одну и ту же величину во все время движенія.

210. *Законъ сохраненія площадей.* Если внѣшнихъ силъ вовсе нѣтъ, то моментъ ихъ для любой изъ координатныхъ осей есть нуль. Тогда для каждой координатной плоскости получимъ законъ сохраненія площадей, т. е. описываемыя площади будутъ пропорціональны времени. Такой результатъ получится для изолированной системы, въ которой дѣйствуютъ только внутреннія силы, т. е. которая устранена отъ всякихъ внѣшнихъ вліяній.

211. *Неизмѣнная плоскость.* Законъ сохраненія площадей по своему содержанію тождественъ съ закономъ сохраненія моментовъ количествъ движенія. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ имѣемъ зависимость

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\mu}{2},$$

то изъ уравненія (63) получаемъ

$$\mu = C,$$

т. е. удвоенная описываемая въ единицу времени площадь есть моментъ количествъ движенія, взятый для оси, перпендикулярной къ той плоскости, на которой разсматриваемъ проекцію движенія. Если система изолированная, то для всѣхъ трехъ координатныхъ осей получаемъ постоянство момента количествъ движенія; отсюда слѣдуетъ, что и равнодѣйствующій или полный моментъ количиствъ движенія имѣетъ постоянную величину и постоянное направленіе.

Плоскость къ нему перпендикулярная называется неизмѣнной плоскостью, такъ какъ она остается одна и та же во все время движенія. Разсматривая площади, описываемыя на этой плоскости, конечно получимъ, такъ же, какъ и для всякой другой плоскости, что эти площади пропорціональны времени; величина площади для единицы времени равна половинѣ равнодѣйствующаго момента. А такъ какъ (при разложеніи на три взаимно перпендикулярныя направленія) равнодѣйствующая больше всякой изъ своихъ составляющихъ, то величина площади, описываемой въ единицу времени на неизмѣнной плоскости, больше чѣмъ на всякой другой плоскости.

212. *Приложенія закона Сохраненія Площадей. Неизмѣнная плоскость нашей планетной системы.* Плоскости орбитъ земли и другихъ планетъ измѣняютъ свое положеніе въ пространствѣ, вслѣдствіе взаимныхъ возмущающихъ дѣйствій; ни одна изъ нихъ не можетъ считаться неподвижной и не можетъ служить для отсчитыванія отъ нея перемѣщеній. Но планетная система есть система изолированная, слѣд. въ ней есть неизмѣнная плоскость, которая сохраняетъ свое положеніе, и къ ней должны быть относимы всѣ разнообразныя движенія планетной системы.

Положеніе неизмѣнной плоскости опредѣляется тѣмъ условіемъ, что она перпендикулярна къ оси моментовъ количествъ движенія; слѣд., зная массы планетъ и ихъ скорости, можемъ опредѣлить положеніе неизмѣнной плоскости нашего міра. Такое опредѣленіе было сдѣлано Лапласомъ приблизительно. Такъ какъ орбиты всѣхъ большихъ планетъ мало уклоняются отъ орбиты земли, то неизмѣнная плоскость почти совпадаетъ съ земной орбитой; уголъ между ними составляетъ около 1,7698 градуса, а долгота восходящаго узла—114,3979 градуса. Эти числа относятся къ 1750 году; они измѣняются съ теченіемъ времени, такъ какъ орбита земли перемѣняется отъ возмущеній; но измѣненіе ихъ очень медленное и едва замѣтное даже за періодъ въ 100 лѣтъ.

213. *Дальнѣйшее приложеніе теоремы площадей*

къ изученію движенія солнечной системы. Эллиптическое движеніе планетъ есть первое приближеніе, получающееся при предположеніи, что на планету дѣйствуетъ только притяженіе солнца. Такъ какъ, кромѣ солнца, планету притягиваютъ и всѣ прочія тѣла нашей системы, то получается движеніе, отличающееся отъ эллиптическаго, и гораздо болѣе сложное. Но во всякомъ случаѣ дѣйствіе солнца есть преобладающая сила приложенная къ планетѣ. Она значительно больше возмущающихъ, силъ, т. е. притяженій другихъ планетъ. Поэтому отступленія отъ правильнаго эллиптическаго движенія, хотя замѣчаются при точныхъ наблюденіяхъ, но они очень не велики. Это позволяетъ примѣнить, для полученія второго приближенія, слѣдующій пріемъ. Будемъ считать, что все-таки планета движется по эллипсу, но что этотъ эллипсъ медленно и постепенно измѣняется. Мы считаемъ, что измѣняются всѣ элементы эллипса, его большая полуось (a), эксцентриситетъ (e), уголъ наклона орбиты къ неизмѣнной плоскости (φ), время обращенія (T) и т. д.; все это не постоянныя величины, а функціи времени. Другими словами мы вводимъ понятіе о мгновенномъ эллипсѣ, безпрестанно измѣняющемся. Найдя первое приближеніе—т. е. Кеплерово эллиптическое движеніе,—и опредѣливъ для этого эллипса тѣ постоянныя величины, которыя его характеризуютъ, (a, e, φ и т. д.), мы затѣмъ измѣняемъ эти постоянныя, предполагаемъ ихъ функціями времени. Вотъ сущность методы измѣненія постоянныхъ, примѣняемой при изученіи планетныхъ возмущеній. Конечно таже метода можетъ быть примѣнена и для другихъ задачъ Динамики; это общая динамическая метода.

Не лишнее замѣтить, что элементы планетныхъ орбитъ измѣняются очень медленно; найдя величины этихъ элементовъ для какого нибудь мгновенія, мы можемъ примѣнять эти величины, безъ измѣненія, въ теченіи многихъ лѣтъ для нахожденія положенія планеты, и не получимъ при этомъ большой ошибки.

214. Принимая теперь, что движеніе по мгновенному эллипсу есть точная картина явленія, примѣнимъ ко всей планетной системѣ Законъ Сохраненія Площадей. Но для ускоренія вывода введемъ еще два упрощающія допущенія:

a) Будемъ считать солнце неподвижнымъ, и стоящимъ въ фокусѣ того эллипса, который описываетъ планета. Правильнѣе было бы разсматривать что и солнце и планета движутся по эллипсамъ около общаго ихъ центра тяжести, но такъ какъ масса солнца гораздо больше массы планеты, то движеніемъ солнца можно пренебречь.

b) Пренебрежемъ движеніемъ всѣхъ спутниковъ, а массы ихъ присоединимъ къ массѣ планеты.

За координатныя плоскости примемъ неизмѣнную плоскость и двѣ плоскости къ ней перпендикулярныя, и выразимъ сначала Законъ Сохраненія Площадей для неизмѣнной плоскости.

Называя массу планеты черезъ m, а элементы ея мгновеннаго эллипса черезъ

$$a,\ e,\ \varphi,\ T,$$

получимъ:

a) площадь этого эллипса

$$\pi.a^2\sqrt{1-e^2}\ ;$$

b) проекція ея на неизмѣнную плоскость умноженная на массу, будетъ:

$$m.\pi.a^2\sqrt{1-e^2}.\ \mathrm{Cos}\ \varphi;$$

c) площадь, описанная въ единицу времени:

$$\frac{m.\pi.a^2\sqrt{1-e^2}.\ \mathrm{Cos}\ \varphi}{T}.$$

Такъ какъ эллипсъ безпрестанно перемѣняется, то послѣднее выраженіе мы можемъ примѣнять только для безконечно малаго времени dt, и для него имѣемъ описанную площадь

$$\frac{m.\pi.a^2\sqrt{1-e^2}.\ \mathrm{Cos}\ \varphi.dt}{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

Теперь вспомнимъ третій Кеплеровъ законъ: квадраты временъ обращеній пропорціональны кубамъ среднихъ разстояній, т. е., обозначая постоянную величину буквою c, имѣемъ *).

$$\frac{T^2}{a^3}=c. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

или

$$T=\sqrt{ca^3}\ .$$

*) Строго говоря имѣемъ

$$(M+m)\,\frac{T^2}{a^3}=\mathrm{const}$$

гдѣ M—масса солнца, m—масса планеты. Но такъ какъ отношеніе m къ M очень малая дробь, то можно писать уравненіе (65) и считать c одинаковымъ для всѣхъ планетъ.

Вставляя это въ (64), получимъ площадь, описанную одной планетой:

$$\frac{m.\pi\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{c}}\operatorname{Cos}\varphi.dt.$$

Сложимъ такія выраженія для всѣхъ планетъ. Общая сумма должна по Закону Сохраненія площадей выражаться нѣкоторой постоянной величиной, умноженной на время dt. Сложеніе обозначимъ знакомъ Σ; постояннын

$$\sqrt{c}\,,\ \pi$$

можемъ отбросить; тогда получимъ

$$\Sigma\left(m\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\cdot\operatorname{Cos}\varphi\right)=\text{const}\ \ldots\ldots\ (66).$$

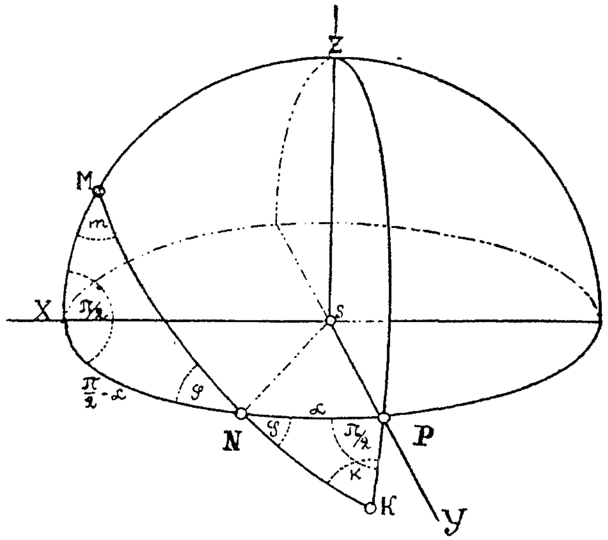
Вотъ какой результатъ даетъ намъ Законъ Сохраненія Площадей. Онъ устанавливаетъ нѣкоторую зависимость между измѣняющимися величинами полу-осей, эксцентриситетовъ и наклоновъ орбитъ всѣхъ планетъ. Эти элементы не могутъ измѣняться такъ, что происходитъ увеличеніе всѣхъ величинъ

$$a,\ 1-e^2,\ \cos\varphi.$$

Нѣкоторыя изъ нихъ могутъ увеличиваться, но другія при этомъ должны уменьшаться, такъ чтобы сумма (66) оставалась равна нѣкоторой постоянной величинѣ. Эта постоянная представляетъ собою какъ будто бы нѣкоторый **неизмѣнный фондъ**, отпущенный на всѣ планеты и распредѣляемый между ними. Такая неизмѣнность уже отчасти предсказываетъ устойчивость планетной системы.

215. Подобные же результаты мы получимъ, примѣняя Законъ Сохраненія Площадей къ двумъ другимъ координатнымъ плоскостямъ. Обратимся къ фиг. 159; на ней плоскости координатъ и плоскость орбиты изображены помощію ихъ пересѣченій съ поверхностью шара, центръ котораго S есть солнце. XSY— есть неизмѣнная плоскость; ось Z перпендикулярна къ ней. KNM представляетъ часть орбиты планеты. Точку N (пересѣченіе на нашемъ шарѣ, плоскости орбиты съ неизмѣнной плоскостью) назовемъ восходящимъ угломъ; уголъ NSY, есть долгота восходящаго узла; его назовемъ α. K и M означаютъ точки пересѣченія, на нашемъ шарѣ, плоскости орбиты съ координатными

плоскостями ZSY, XSY. Уголъ k сферическаго треугольника NKP есть уголъ между орбитой и координатной плоскостью ZSY. Уголъ m сферическаго треугольника NMX есть уголъ орбиты съ координатной плоскостью XSZ.



Фиг. 159.

Уравненіе Площадей для координатной плоскости ZSY будетъ отличаться отъ (66) только тѣмъ, что вмѣсто угла φ нужно поставить уголъ k; но изъ треугольника NKP имѣемъ

$$\operatorname{Cos} k = \operatorname{Sin} \varphi . \operatorname{Cos} \alpha$$

слѣд. уравненіе площадей будетъ такое:

$$\Sigma \left(m \sqrt{a.} \; \sqrt{1-e^2}.\operatorname{Sin} \varphi.\operatorname{Cos} \alpha\right) = \text{const} \; . \; . \; . \; . \; . \; (67).$$

Для плоскости XSZ уравненіе получается изъ (66), замѣняя уголъ φ угломъ m. Но изъ треугольника NMX имѣемъ,

$$\operatorname{Cos} m = \operatorname{Sin} \varphi . \operatorname{Cos} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{Sin} \varphi . \operatorname{Sin} \alpha,$$

слѣд. получаемъ такое уравненіе площадей:

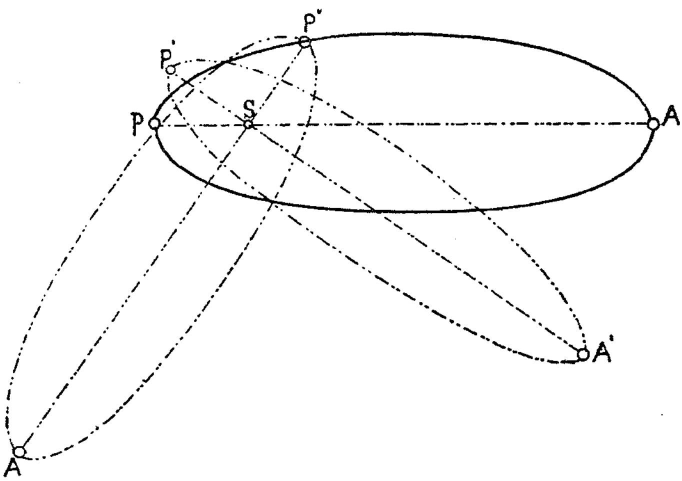
$$\Sigma \left(m \sqrt{a} \; \sqrt{1-e^2}. \operatorname{Sin} \varphi . \operatorname{Sin} \alpha\right) = \text{const} \; . \; . \; . \; . \; (68).$$

216. Всѣ три уравненія (66), (67), (68), которыя намъ даетъ

Законъ Сохраненія Площадей, имѣютъ одинаковый характеръ. Они связываютъ измѣненія слѣдующихъ элементовъ орбитъ:

большой полуоси . . . . a
эксцентриситета . . . . e
наклона орбиты . . . . φ
долготы восходящаго угла . . α.

Въ планетномъ мірѣ замѣчается еще одно интересное явленіе возмущеннаго движенія: перемѣщеніе линіи апсидовъ. Такъ называется линія, соединяющая между собою перигелій P и афелій A (фиг. 160), т. е. точку, гдѣ планета ближе всего къ



Фиг. 160.

солнцу, съ точкой наибольшаго удаленія отъ солнца. Перемѣщеніе линіи апсидовъ состоитъ въ томъ, что прямая PA поворачивается, все время проходя черезъ солнце. Такъ какъ при этой пертурбаціи размѣры эллипса остаются прежніе, то не измѣняется и площадь, описываемая планетой въ единицу времени. А вслѣдствіе этого Законъ Сохраненія Площадей не даетъ никакихъ указаній на этотъ видъ возмущеннаго движенія.

217. *Измѣненіе скорости вращенія земли при охлажденіи ея* Такъ какъ въ этомъ явленіи участвуютъ только внутреннія силы, то сюда можетъ быть примѣненъ Законъ Сохраненія Площадей. Землю будемъ считать правильнымъ шаромъ,

одинаковой плотности во всей ея массѣ. Пусть, вслѣдствіе охлажденія, радіусъ земли R_1 уменьшится и сдѣлается

$$R = R_1\ (1-n), \ldots \ldots (69),$$

причемъ n очень малая дробь. Пренебрегая степенями этой дроби получимъ зависимость между новымъ и прежнимъ объемомъ

$$V = V_1\ (1-3n); \ldots$$

съ тою же степенью точности найдемъ, что отношеніе новой плотности къ прежней будетъ:

$$\triangle = \triangle_1\ (1 + 3n) \ \ldots \ldots (70).$$

Угловыя скорости вращенія земли около ея оси—новую и прежнюю назовемъ ω, ω_1. Намъ нужно опредѣлить сумму площадей, описываемыхъ въ единицу времени около оси земли при ея вращеніи всѣми массами, составляющими земной шаръ, и выразить, что эта сумма не должна измѣняться отъ охлажденія. Здѣсь приходится сравнивать движеніе двухъ тѣлъ геометрически подобныхъ, но разной плотности. Объемы соотвѣтственныхъ частей ихъ относятся какъ кубы радіусовъ; геометрическія площади, описываемыя соотвѣтствующими точками, относятся какъ произведенія изъ угловой скорости на квадратъ радіуса. Слѣд. понимая слово „описываемая площадь“ въ динамическомъ смыслѣ, т. е. какъ произведеніе этой площади на массу, получимъ отношеніе описываемыхъ площадей до охлажденія и послѣ него.

$$\frac{\triangle_1\, \omega_1\, R_1^{\,5}}{\triangle\ \omega\ R^5}.$$

Оно должно быть равно единицѣ. Вставляя сюда отношенія радіусовъ и плотностей (69) и (70), получимъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} \cdot \frac{1}{1+3n} \cdot \frac{1}{(1-n)^5} = 1.$$

Откуда, отбрасывая всѣ степени n, кромѣ первой, найдемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = 1 + 3n - 5n = 1 - 2n$$

или

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 1 + 2n.$$

Итакъ дробь 2n показываетъ относительное увеличеніе угловой скорости, а слѣд. уменьшеніе продолжительности сутокъ, вслѣдствіе охлажденія.

218. ***Вліяніе движенія поѣздовъ, кораблей и пр. на скорость вращенія земли.*** Вообразимъ себѣ, что значительное число судовъ, поѣздовъ и т. д. движутся вокругъ земли въ направленіи ея вращенія. Если эти движенія не компенсируются движеніями въ обратномъ направленіи (т. е. противъ вращенія земли), то, для сохраненія прежней величины суммы описываемыхъ площадей, необходимо должна уменьшиться угловая скорость вращенія земного шара около его оси, т. е. должна увеличиться продолжительность сутокъ. Пусть всѣ эти суда, поѣзда и т. д. по прошествіи времени t сразу останавливаются; тогда появится прежняя скорость вращенія земли, но за время t уже произойдетъ нѣкоторое отставаніе вращенія земли, т. е. запаздываніе астрономическаго времени.

219. ***Вертящійся ребенокъ.*** Еще примѣромъ на Законъ Сохраненія Площадей можетъ служить извѣстная дѣтская игра. Ребенокъ, вытянувъ руки въ горизонтальное положеніе вправо и влѣво, сообщаетъ своему тѣлу быстрое вращеніе около вертикальной оси; затѣмъ сразу опускаетъ руки внизъ, вдоль тѣла. При этомъ уменьшаются площади, описываемыя частями рукъ, а слѣдовательно должно получиться соотвѣтствующее увеличеніе площадей, описываемыхъ остальнымъ тѣломъ. Т. е. должно получиться замѣтное увеличеніе угловой скорости вращенія тѣла, которое сказывается быстрымъ толчкомъ, производящимъ даже небольшое головокруженіе.

220. ***Неправильное примѣненіе Закона Сохраненія Площадей къ движенію человѣка и другихъ животныхъ.*** Это неправильное примѣненіе излагалось во многихъ учебникахъ и сильно укоренилось, такъ что стоитъ о немъ упомянуть и заняться опроверженіемъ этого заблужденія.

Начнемъ слѣдующей выпиской изъ Механики Делонэ *).

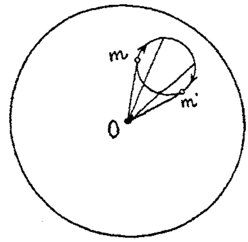
„Если мы предположимъ, что какое нибудь живое существо изолировано въ пространствѣ, и что къ нему не приложено никакой внѣшней силы, то не только это живое существо не будетъ въ состояніи перемѣстить свой центръ тяжести, но, кромѣ

*) Traité de Mécanique rationelle, par M. Ch. Delaunay. 3-me edition. 1862. § 229. Очень замѣчательный учебникъ извѣстнаго астронома, члена Парижской Академіи Наукъ; отличается особой ясностью и простотой изложенія.

того, для него окажется невозможнымъ сообщить своему тѣлу вращеніе около этой точки. Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы оно ни дѣйствовало своими мускулами, оно можетъ развить только внутреннія силы; отсутствіе внѣшнихъ силъ вызываетъ то слѣдствіе, что сумма описанныхъ площадей, проектированная на произвольную плоскость, проходящую черезъ центръ тяжести, сохраняетъ постоянную величину; слѣд. она должна постоянно оставаться нулемъ, такъ какъ по нашему предположенію живое существо первоначально было неподвижно, то есть первоначально эта сумма равнялась нулю".

Несмотря на правильность этого разсужденія, выводимое изъ него заключеніе, сдѣланное Делонэ, а за нимъ и многими другими, о невозможности для живого существа повернуть свое тѣло около какой нибудь оси, оказывается невѣрнымъ. Делонэ говоритъ, что если одна часть тѣла повернется около оси въ одну сторону, напр., вправо, то другая часть должна повернуться около той же оси въ обратномъ направленіи; площади, описанныя вправо, компенсируются площадями, описанными влѣво, и даютъ сумму площадей равную нулю; общій же поворотъ всего тѣла въ одну сторону не можетъ произойти. Хотя мы замѣчаемъ, прибавляетъ онъ, что человѣкъ, стоя на полу, можетъ повернуться около вертикальной оси, но такой поворотъ происходитъ не безъ участія внѣшнихъ силъ. Здѣсь самую важную роль играетъ треніе подошвъ ногъ о полъ; оно даетъ для вертикальной оси необходимый моментъ внѣшнихъ силъ. Если бы такого тренія не было, напр., если бы полъ былъ абсолютно гладкій и скользкій, то вращеніе было бы невозможно.

Лица, приводящія такое доказательство, не замѣчаютъ, что при этомъ они опровергаютъ только возможность живому существу повернуться **всѣмъ своимъ тѣломъ въ одну сторону**, безъ сообщенія отдѣльнымъ частямъ тѣла, кромѣ **этого вращенія**, еще различныхъ другихъ движеній. Они доказываютъ только то, что человѣкъ, или животное, не можетъ сообщить себѣ такое вращеніе, какое получаетъ волчокъ или другое вполнѣ неизмѣняемое тѣло. Но живыя существа могутъ сообщать своимъ отдѣльнымъ членамъ разнообразныя движенія; можно вращать руки или ноги относительно остального туловища и такъ подобрать эти движенія, что они компенсируютъ вращеніе всего туловища; то есть эти дополнительныя движенія рукъ или ногъ даютъ площадь равную, но обратную по знаку, той площади, которую описываетъ остальное тѣло, вращаясь около нѣкоторой оси. Такимъ образомъ, явленіе этого вращенія не будетъ противурѣчить Закону Сохраненія Площадей. Представимъ себѣ какое нибудь тѣло, могущее безъ сопротивленія вращаться около оси O, часть котораго m (фиг. 161) можетъ двигаться относительно остального тѣла, по кругу mm′. При этомъ движеніи части m радіусъ векторъ Om описываетъ около оси O то положительныя, то отрицательныя площади (т. е. то по часовой стрѣлкѣ, то противъ нея). За одинъ полный оборотъ по кругу mm′ получается избытокъ положительныхъ площадей надъ отрицательными, измѣряемый площадью круга mm′. Для соблюденія Закона Сохраненія Площадей требуется компенсація, т. е. должна быть описана въ отрицательномъ направленіи площадь, равная упомянутому кругу; и такъ все тѣло должно повернуться противъ часовой стрѣлки на нѣкоторый уголъ около оси O. При непрерывномъ вращеніи массы m по кругу mm′ получится непрерывное вращеніе тѣла около оси O.



Фиг. 161.

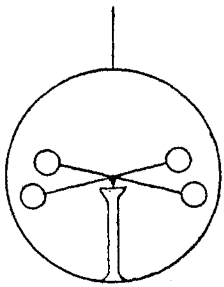
Механизмъ движеній, помощію которыхъ живое существо можетъ сообщить себѣ вращеніе, вполнѣ согласуется съ выше объясненнымъ. Вообразимъ себѣ стоящаго человѣка; для вращенія около вертикальной оси онъ долженъ своей рукой производить коническое движеніе, при которомъ кулакъ его описываетъ кругъ, означенный на нашей фигурѣ буквами mm′. При этомъ не требуется необходимо треніе подошвъ его ногъ о полъ, и вращеніе всего тѣла можно получить, стоя на абсолютно гладкой плоскости.

Это лучше всего демонстрируется „скамейкой профессора Жуковскаго“, которая состоитъ изъ небольшой горизонтальной площадки, поставленной на шарики и могущей вращаться безъ сопротивленія. Ставши на эту площадку, человѣкъ помощію описаннаго нами движенія руки безъ труда сообщаетъ своему тѣлу вращеніе около вертикальной оси.

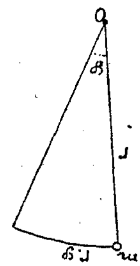
221. *Историческая замѣтка.* Первыя возраженія противъ заключенія Делонэ о невозможности живому существу сообщить себѣ вращеніе, были высказаны Марселемъ Депре, который основывался на томъ фактѣ, что падающая кошка всегда становится на ноги. Слѣд. она можетъ повернуться, какъ нужно, во время паденія, хотя при этомъ на нее не дѣйствуетъ никакой внѣшній моментъ, а исключительно внутреннія силы. Снявши съ падающей

кошки рядъ снимковъ мгновенной фотографіей, М. Депре убѣдился, что кошка при этомъ производитъ лапкой рядъ поворотовъ, соотвѣтствующихъ движенію точки *m* нашей фигуры 161.

222. ***Радіометръ Крукса.*** Этотъ интересный приборъ, какъ извѣстно, состоитъ изъ аллюминіевыхъ крыльевъ (фиг. 162), которыя помѣщены въ разрѣженное пространство и могутъ тамъ вращаться около вертикальной оси. Одна сторона крыла поли-



Фиг. 162.



Фиг. 163.

рованная металлическая; противуположная сторона—матовая, закопченная. При дѣйствіи теплоты или свѣта, эта миніатюрная мельница приходитъ во вращеніе.

Такое движеніе радіометра объясняютъ ударами на его крылья, производимыми тѣми частицами воздуха, которыя въ небольшомъ количествѣ остаются въ резервуарѣ радіометра, не смотря на образованіе тамъ сильнаго разрѣженія. Если это объясненіе справедливо, то причиной движенія крыльевъ служатъ силы, которыя мы должны назвать внутренними, когда будемъ разсматривать систему, состоящую изъ этихъ крыльевъ и резервуара. Освободимъ эту систему отъ дѣйствія горизонтальныхъ внѣшнихъ силъ; для этого повѣсимъ резервуаръ на тонкой, длинной нити. Теперь мы можемъ примѣнить къ нашей системѣ Законъ Сохраненія Площадей; будемъ говорить о площадяхъ, описываемыхъ около вертикальной оси радіометра. Если первоначально мельница была въ покоѣ, то сумма описанныхъ площадей была равна нулю. Эта величина не можетъ измѣниться дѣйствіемъ внутреннихъ силъ, слѣд. когда крылья мельницы начнутъ вращаться въ положительномъ направленіи, то резервуаръ долженъ поворачиваться въ обратномъ направленіи и описывать отрицательныя площади, компенсирующія положительное вращеніе крыльевъ.

Величина площади, описанной въ единицу времени при вращеніи тѣла около нѣкоторой оси, равна половинѣ произведенія изъ угловой скорости на моментъ инерціи тѣла для той же оси *). Поэтому, если назовемъ моменты инерціи крыльевъ и резервуара черезъ

$$I,\ I',$$

а ихъ угловыя скорости

$$\omega,\ \omega',$$

то должны имѣть:

$$I\omega - I'\omega' = 0,$$

или

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{I}{I'},$$

если первоначальная скорость была нуль. Если же въ началѣ крылья вертѣлись со скоростью ω_0, а резервуаръ удерживали отъ вращенія, то разность

$$I\omega - I'\omega'$$

должна равняться первоначальной величинѣ описанной площади, т. е.

$$I\omega_0.$$

Вотъ рядъ заключеній, которыя намъ даетъ Законъ Сохраненія Площадей, если признать, что причину движенія крыльевъ составляютъ удары частичекъ воздуха. Если эти заключенія подтвердятся опытомъ, то указанная гипотеза можетъ считаться доказанной.

223. Опыты, которые произвели Бертанъ и Гарбъ, хорошо согласуются съ предъидущими выводами. Для того случая, когда первоначальная скорость мельницы равна нулю, получилось:

1 опытъ.

отношеніе моментовъ инерціи:

$$\sqrt{\frac{I'}{I}} = 77;$$

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, площадь, описанная частицей m около центра O будетъ (фиг. 163):

$$m.\frac{1}{2}.r^2.\varphi,$$

а сумма площадей для всего тѣла составитъ:

$$\frac{1}{2}.\varphi.\Sigma mr^2$$

При равномѣрномъ вращеніи величина угла φ для единицы времени равна угловой скорости.

Отношеніе угловыхъ скоростей

$$\frac{\omega}{\omega'}=81{,}7.$$

2 опытъ.

Отношеніе моментовъ инерціи $=17$
Отношеніе угловыхъ скоростей $=17{,}3$.

3 опытъ.

Отношеніе моментовъ инерціи $=45$
Отношеніе угловыхъ скоростей $=47{,}5$ *).

---

*) См. Comptes Rendus Парижской Академіи Tome 84 p. 30. Для того, чтобы уменьшить сопротивленіе вращенію резервуара, опытъ былъ сдѣланъ въ пустотѣ.

ТРИНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

Законъ живыхъ силъ.

224. Еще въ 9-ой бесѣдѣ былъ выведенъ этотъ законъ, заключающійся въ томъ, что при движеніи системы:

Пріобрѣтенная системой на протяженіи извѣстнаго пути живая сила равна суммѣ работъ всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, дѣйствующихъ въ системѣ.

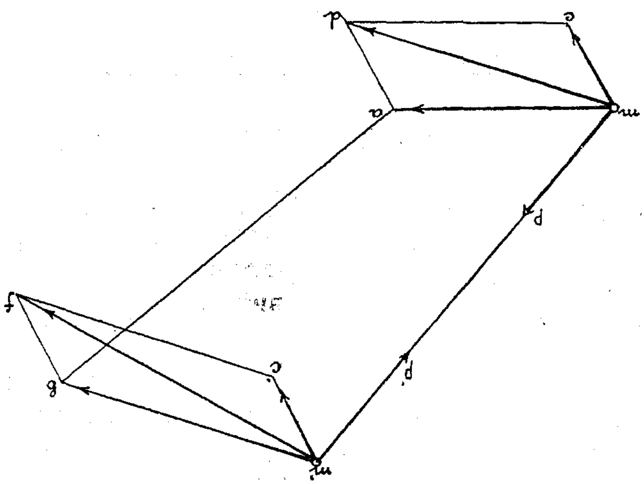
Мы тогда уже обратили вниманіе на то, что при этомъ законѣ не происходитъ въ каждомъ частномъ случаѣ исключеніе внутреннихъ силъ. Вообще говоря, онѣ входятъ въ уравненіе живыхъ силъ, въ видѣ работы, и это затрудняетъ примѣненіе Закона Живыхъ Силъ. Часто приходится отказываться отъ него и искать другой законъ для рѣшенія встрѣтившагося вопроса. Возьмемъ, напр., вопросъ объ измѣненіи скорости вращенія земли, вслѣдствіе ея охлажденія; попытаемся рѣшить его помощію Закона Живыхъ Силъ. При охлажденіи земной шаръ уменьшается въ объемѣ, стягивается, частицы его сближаются, и молекулярныя силы производятъ нѣкоторую работу, которая должна быть введена въ уравненіе.

Но мы затрудняемся написать выраженіе для этой работы, а потому принуждены отказаться отъ примѣненія здѣсь Закона Живыхъ Силъ. Для рѣшенія нашего вопроса нужно взять такой законъ, въ который внутреннія силы вовсе не входятъ. Таковъ Законъ Плошадей, которымъ мы и воспользовались въ n° 217.

225. *Случаи, когда работа внутреннихъ силъ равна нулю.* Мы уже указывали, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ работа внутреннихъ силъ обращается въ нуль; тогда мы избавляемся отъ присутствія этихъ неизвѣстныхъ въ уравненіи живыхъ силъ, и законъ этотъ получаетъ особое значеніе для приложеній. Особенно важны слѣдующіе два случая:

Первый случай. Если форма тѣла во время движенія не измѣняется, т. е. если разстоянія между частицами его остаются прежнія, то работа внутреннихъ силъ, дѣйствующихъ между этими частицами, равна нулю.

Дѣлая такое утвержденіе, мы предполагаемъ, согласно съ общепринятымъ взглядомъ, что взаимное дѣйствіе между двумя частицами m, m′ (фиг. 164) приводится къ двумъ равнымъ и прямо-



Фиг. 164.

противуположнымъ силамъ P, P′ идущимъ по прямой, которая соединяетъ частицы m,m′; силы могутъ быть или притягательныя или отталкивательныя.

Докажемъ эту теорему. Она очевидна для того случая, когда перемѣщенія mc, m′c′ двухъ частицъ равны и параллельны; тогда работы двухъ силъ P и P′ численно равны и по знаку противуположны; сумма работъ этихъ двухъ силъ равна нулю. Но разсмотримъ случай, когда перемѣщенія этихъ частицъ ma и m′b не одинаковы.

Сумма работъ двухъ силъ P и P′ не измѣнится, если къ перемѣщеніямъ точекъ m, m′ мы прибавимъ одинаковыя (т. е. равныя и параллельныя) перемѣщенія mc и m′c′, т. е. если вмѣсто перемѣщенія ma возьмемъ геометрическую сумму двухъ перемѣщеній ma и mc, или діагональ md параллелограмма, посроеннаго на ma и mc; а вмѣсто m′b возьмемъ діагональ m′f, представляющую геометрическую сумму перемѣщеній m′b и m′c′. Дѣйствительно, работа силы для перемѣщенія, идущаго по діагонали, равна суммѣ работъ той же силы для перемѣщеній, идущихъ по сторонамъ параллелограмма. Слѣд. замѣна перемѣщеній ma, m'b перемѣщеніями по діагоналямъ md, mf означаетъ прибавку двухъ работъ: работы силы P для перемѣщенія mc и работы силы P' для перемѣщенія m'c'. А такъ какъ mc и m'c' равны и параллельны, то сумма этихъ двухъ работъ равна нулю. Итакъ замѣна сторонъ ma, m'b діагоналями md, m'f не измѣняетъ сумму работъ силъ P и P'.

Это справедливо для какой угодно величины и направленія прибавочныхъ перемѣщеній mc, m'c', лишь бы эти два перемѣщенія были равны и параллельны. Теперь выберемъ для нихъ опредѣленное направленіе и величину, а именно возьмемъ mc равнымъ и противуположнымъ ma. Тогда полное перемѣщеніе точки m, какъ составное изъ двухъ равныхъ и противуположныхъ, будетъ нулемъ, т. е. точка m сдѣлается неподвижной; работа приложенной къ ней силы равна нулю. Остается только работа силы P', дѣйствующей на точкѣ m'.

Этотъ пріемъ—остановки одной изъ двухъ частицъ мы можемъ примѣнять одинаково, какъ въ томъ случаѣ, когда разстояніе частицъ m,m' не перемѣняется, такъ и для случая, когда при перемѣщеніи происходитъ измѣненіе mm'. Въ обоихъ случаяхъ мы можемъ пользоваться этимъ упрощеніемъ; одну частицу будемъ считать неподвижной и разбирать только работу производимую на другой частицѣ.

226. Теперь остановимся на томъ случаѣ, когда разстояніе частицъ mm' не измѣняется во время движенія. Точка m неподвижна, слѣд. m' движется не иначе какъ по поверхности шара, имѣющаго центръ m, а радіусомъ mm'. Сила же P' идетъ по прямой mm', т. е. по радіусу шара; слѣд. она всегда перпендикулярна къ перемѣщенію точки m', т. е. работа этой силы постоянно равна нулю. Итакъ обѣ силы даютъ работы, равныя нулю, и наша теорема доказана.

Мы уже видѣли въ 9-ой бесѣдѣ, какое важное значеніе эта теорема имѣетъ для приложеній Закона Живыхъ Силъ.

227. Второй случай. Переходимъ ко второму случаю, когда работа внутреннихъ силъ тоже оказывается нулемъ.

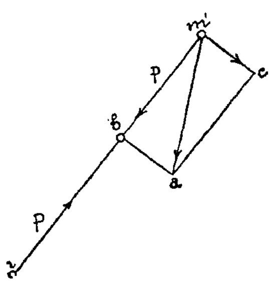
Если фигура тѣла измѣняется во время движенія, но подъ конецъ движенія форма и размѣры тѣла возстановляются прежнія, то полная работа внутреннихъ силъ за все время движенія равна нулю.

Эта теорема имѣетъ мѣсто, если относительно внутреннихъ силъ P, P', дѣйствующихъ между двумя частицами m,m' (фиг

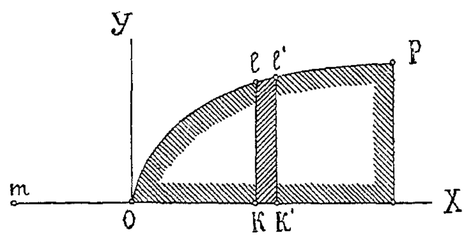
165), прежнюю гипотезу о ихъ равенствѣ и противуположности, дополнимъ еще слѣдующей гипотезой: общая величина силъ P,P зависитъ исключительно отъ величины разстоянія между частицами m,m′ и ни отъ чего больше. Другими словами, мы допускаемъ, что какъ только разстояніе между частицами m,m′ дѣлается прежнее, то и силы P,P получаютъ прежнюю свою величину, хотя бы при этомъ направленіе линіи mm′ въ пространствѣ измѣнилось.

Мы далѣе разберемъ подробно эту гипотезу, а теперь займемся доказательствомъ поставленной теоремы.

Въ n⁰ 225 было доказано, что при нахожденіи суммы работъ двухъ силъ P,P, представляющихъ взаимодѣйствіе частицъ m,m′, всегда можно считать одну изъ этихъ частицъ неподвижной. Пусть это будетъ частица m (фиг. 165). Элементарное пе-



Фиг. 165.



Фиг. 166.

ремѣщеніе m′a другой частицы можно разложить на два перемѣщенія m′b, m′c, изъ которыхъ одно идетъ по линіи mm′, соединяющей частицы, а другое—перпендикулярно къ этой прямой. Работа силы P для второго изъ этихъ перемѣщеній равна нулю, такъ какъ перемѣщеніе перпендикулярно силѣ. Остается работа силы P для перемѣщенія m′b, направленнаго вдоль по силѣ; эта элементарная работа будетъ равна произведенію силы на перемѣщеніе m′b, т. е. на измѣненіе разстоянія между частицами; слѣд. работа будетъ:

$$P . m'b.$$

Конечная работа для конечнаго измѣненія разстоянія $\overline{mm'}$ получится черезъ суммированіе элементарныхъ работъ. При составленіи суммы нужно принять во вниманіе, что внутренняя частичная сила P обыкновенно измѣняется съ измѣненіемъ разстоянія mm′: она есть функція этого разстоянія. Изобразимъ эту измѣняемость графически (фиг. 166); по абсциссамъ, начиная съ точки O откладываетъ измѣненія длины mm′, а по ординатамъ—соотвѣтствующія величины частичной силы P. Получается кривая Oep, изображающая зависимость частичной силы отъ измѣненія разстоянія между частицами (т. е. отъ удлиненія или сжатія этого разстоянія). Когда первоначальное разстояніе получитъ удлиненіе Ok, то частичная сила изображается ординатной ke. Если затѣмъ удлиненіе получитъ безконечно малое приращеніе kk′, то сила произведетъ элементарную работу, величина которой равна произведенію

$$kl.kk'$$

т. е. измѣряется заштрихованной на чертежѣ площадью $kll'k$. Конечная работа, производимая силой P при удлиненіи отъ нуля до On, будетъ сумма элементарныхъ работъ, т. е. измѣряется площадью $Olp\ nO$, заштрихованной по контуру. Работа эта будетъ отрицательная, такъ какъ частичныя силы противятся измѣненію формы.

При возстановленіи первоначальной формы тѣла, т. е. при постепенномъ уничтоженіи удлиненія прямой mm′, частичныя силы производятъ положительную работу, способствуютъ такому возстановленію. По нашей гипотезѣ относительно частичныхъ силъ, онѣ зависятъ исключительно отъ разстоянія между частицами. Поэтому, когда удлиненіе постепенно уменьшаясь дойдетъ до величины Ok, то частичная сила приметъ то же значеніе kl, которое она имѣла при растяженіи, въ моментъ полученія удлиненія Ok. Это справедливо для всѣхъ значеній удлиненія, т. е. законъ измѣненія частичной силы при возстановленіи формы будетъ изображаться той же кривой $pl'lO$, которая представляла постепенное измѣненіе частичной силы при растяженіи. А поэтому работа частичныхъ силъ при возстановленіи формы изобразится прежней площадью кривой $OlpnkO$; но теперь эта работа положительная, а при растяженіи она была отрицательная. Складывая эти двѣ работы—одну для удлиненія, а другую—для возстановленія формы, мы получимъ въ суммѣ, что работа частичныхъ силъ равна нулю. Это справедливо для каждой пары частицъ, входящихъ въ составъ тѣла, слѣд. справедливо и для всего тѣла. Т. е. мы получили тотъ результатъ, на который указали прежде: если форма тѣла измѣняется во время движенія, но подъ конецъ разсматриваемаго пути тѣло принимаетъ ту первоначальную форму, которую оно имѣло въ началѣ пути, то общая сумма работъ всѣхъ внутреннихъ силъ равна нулю.

228. Мы можемъ приложить эту теорему къ движенію любой машины, разсматривая періодъ движенія отъ пуска въ ходъ машины до полной ея остановки. При пусканіи въ ходъ къ частямъ машины прикладываются различныя силы, измѣняющія форму частей. Эти силы дѣйствуютъ во все время хода машины, иногда сохраняя постоянную величину, иногда измѣняясь. Но когда машина останавливается, то дѣйствіе указанныхъ силъ прекращается, и всѣ части машинъ принимаютъ первоначальную форму. Слѣд. работа внутреннихъ силъ, за весь этотъ періодъ движенія, равна нулю, и мы можемъ совершенно не принимать во вниманіе внутреннія силы въ уравненіи Живыхъ Силъ, если примѣняемъ такое уравненіе ко всему періоду движенія машины отъ начала пуска ея въ ходъ до полной остановки.

229. ***Выраженія для живой силы въ частныхъ случаяхъ.*** Разсмотримъ нѣсколько основныхъ случаевъ опредѣленія живой силы; они встрѣчаются въ приложеніяхъ такъ часто, что необходимо имѣть для нихъ готовыя формулы, которыми можно пользоваться, когда понадобится.

Поступательное движеніе. Такъ какъ въ этомъ движеніи всѣ частицы имѣютъ одинаковую скорость, то, называя эту скорость черезъ V, а массу всего тѣла черезъ M, получаемъ для живой силы выраженіе

$$\frac{1}{2} M.V^2$$

Вращеніе твердаго тѣла около оси. Если угловая скорость есть ω, то для частицы, находяшейся на разстояніи r отъ оси и имѣющей массу m, получаемъ:

$$\text{скорость} = r\omega$$
$$\text{квадратъ ея} = r^2\omega^2$$
$$\text{живая сила ея} = \frac{m}{2} r^2\omega^2$$

Суммируемъ живыя силы всѣхъ частицъ; обозначая это дѣйствіе знакомъ Σ, получаемъ для живой силы всего тѣла:

$$\Sigma \frac{1}{2} \omega^2 . mr^2.$$

Вынесемъ общій множитель $\frac{1}{2}\omega^2$ за знакъ суммы; получимъ

$$\frac{1}{2} \omega^2 . \Sigma mr^2.$$

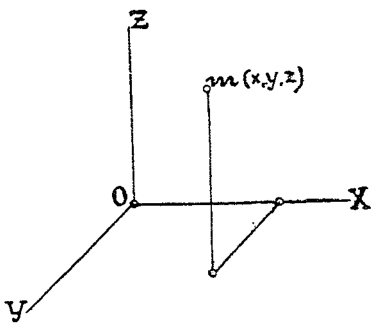
Выраженіе

$$\Sigma\, mr^2$$

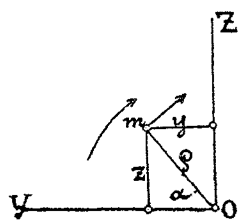
намъ знакомо; это моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія. И такъ въ этомъ случаѣ живая сила равна половинѣ произведенія момента инерціи на квадратъ угловой скорости.

230. ***Вращеніе твердаго тѣла около мгновенной оси.*** Такъ какъ эта ось безпрестанно измѣняетъ свое положеніе въ тѣлѣ, то удобнѣе будетъ замѣнить угловую скорость около этой оси тремя ея проекціями на три взаимно перпендикулярныя направленія, сохраняющія въ тѣлѣ постоянное положеніе. За эти направленія слѣдуетъ взять три главныя оси тѣла; тогда получаемъ наиболѣе простое выраженіе для живой силы.

Пусть p, q, r будутъ слагающія угловой скорости по главнымъ осямъ X, Y, Z. Выведемъ скорость у любой частицы тѣла имѣющей координаты x, y, z (фиг. 167). Для этого найдемъ



Фиг. 167.



Фиг. 168.

сначала проекціи этой скорости на оси, и съ этой цѣлью разсмотримъ отдѣльно вращенія p, q, r.

Вслѣдствіе вращенія p около оси X въ сторону часовой стрѣлки (фиг. 168), частица m получаетъ скорость, равную произведенію изъ p на радіусъ ρ и направленную перпендикулярно къ этому радіусу. Проекціи этой скорости будутъ:

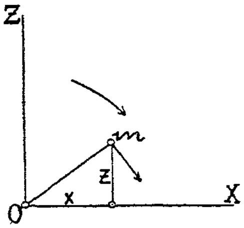
$$\text{на ось } X \ldots O$$

$$\text{на ось } Y \ldots p.\rho.\mathrm{Sin}\,\alpha = -p.\rho.\frac{z}{\rho} = -pz$$

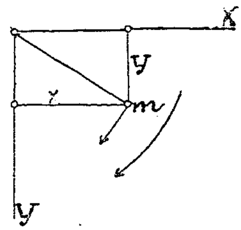
$$\text{на ось } Z \ldots + p.\rho.\mathrm{Cos}\,\alpha = p.\rho\frac{y}{\rho} = +py.$$

Для вращенія q около оси Y получимъ подобнымъ же образомъ проекціи (фиг. 169):

на ось X ... $+qz$
на ось Y ... O
на ось Z ... $-qx$.



Фиг. 169.



Фиг. 170.

Наконецъ вращеніе r около оси Z даетъ проекціи (фиг. 170):

на ось X ... $-ry$
на ось Y ... $+rx$
на ось Z ... O.

Складывая всѣ проекціи, приходящіяся на одну и ту же ось, получаемъ проекціи скорости v на оси:

на ось X ...$qz - ry$
на ось Y ...$rx - pz$
на ось Z ...$py - qx$

Квадратъ скорости v будетъ равенъ суммѣ квадратовъ этихъ проекцій; умножая на половину массы частицы m, получаемъ живую силу частицы m:

$$\frac{1}{2} m \left\{ (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2 \right\} \quad . \; . \; . \; (71).$$

Остается просуммировать это выраженіе для всѣхъ частицъ тѣла, и мы получимъ его живую силу.

231. Суммированіе сдѣлаемъ въ такомъ порядкѣ: сначала произведемъ возвышеніе въ квадратъ двучленовъ выраженія (71). Получимъ члены двухъ родовъ: члены перваго рода будутъ содержать квадратъ какой нибудь координаты, а члены втораго рода будутъ содержать произведеніе двухъ различныхъ координатъ. Суммированіе будемъ дѣлать для каждаго изъ членовъ отдѣльно, и постоянныя величины p, q, r будемъ выносить за знакъ суммы (Σ). У насъ получатся суммы двухъ видовъ: перваго вида съ квадратами координатъ, т. е.

$$\Sigma mx^2, \ \Sigma my^2, \ \Sigma mz^2,$$

и втораго вида съ произведеніями координатъ, т. е.

$$\Sigma mxy,\ \Sigma mxz,\ \Sigma myz.$$

По опредѣленію понятія о главныхъ осяхъ всѣ суммы второго вида равны нулю, и соотвѣтствующіе члены исчезнутъ. Окончательно получаемъ слѣдующій результатъ суммированія:

$$\frac{1}{2}\left[q^2\Sigma mz^2 + r^2\Sigma my^2 + r^2\Sigma mx^2 + p^2\Sigma mz^2 + p^2\Sigma my^2 + q^2\Sigma mx^2\right]$$

или

$$\frac{1}{2}\left[p^2\Sigma m\,(y^2 + z^2) + q^2\Sigma m(x^2 + z^2) + r^2\Sigma m\,(x^2 + y^2)\right]$$

Но выраженія

$$y^2 + z^2,\ x^2 + z^2,\ x^2 + y^2$$

представляютъ квадраты разстояній частицы m отъ осей X, Y, Z. Соотвѣтствующія суммы

$$\Sigma m\,(y^2 + z^2),\ \Sigma m\,(x^2 + z^2),\ \Sigma m\,(x^2 + y^2)$$

даютъ величины моментовъ инерціи для главныхъ осей X, Y, Z. Называя эти моменты инерціи черезъ

$$A,\ B,\ C,$$

получимъ очень простое выраженіе для живой силы,

$$\frac{1}{2}\left\{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (72).$$

232. *Движеніе центра тяжести и движеніе около центра тяжести.* Во многихъ случаяхъ удобно разсматривать движеніе системы, какъ совокупность двухъ: въ первомъ изъ нихъ всѣ точки системы имѣютъ движеніе одинаковое съ ея центромъ тяжести; второе есть движеніе около центра тяжести, который при этомъ считается неподвижнымъ. При такомъ разложеніи получается простое выраженіе для живой силы а именно:

нужно опредѣлить живую силу для каждаго изъ указанныхъ двухъ движеній отдѣльно и затѣмъ ариѳметически сложить эти два выраженія.

Доказательство этой теоремы всего удобнѣе сдѣлать опредѣляя движеніе двумя системами Декартовыхъ координатъ. Одна изъ нихъ, имѣющая оси K, H, Ф, пусть будетъ неподвижна; къ ней отнесемъ движеніе центра тяжести; его координаты для этихъ осей назовемъ:

$$\xi,\ \eta,\ \varphi.$$

Для другой координатной системы начало возьмемъ въ центрѣ тяжести, а оси ея X, Y, Z направимъ параллельно неподвижнымъ осямъ K, H, Ф. Это будетъ подвижная система координатъ, перемѣщающаяся вмѣстѣ съ центромъ тяжести. Координаты какой нибудь массы m относительно подвижной системы назовемъ

$$x,\ y,\ z.$$

Тогда координаты той же массы относительно неподвижныхъ осей будутъ

$$x+\xi,\ y+\eta,\ z+\varphi \ . \ . \ . \ . \ . \ (73).$$

Проекціи скорости будутъ производныя отъ координатъ. Поэтому, разсматривая движеніе массы m относительно подвижныхъ осей, будемъ имѣть скорости этого относительнаго движенія:

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (74).$$

Скорости же дѣйствительнаго движенія массы m будутъ производныя отъ координатъ (73), т. е.

$$\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt};\quad \frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt};\quad \frac{dz}{dt}+\frac{d\varphi}{dt} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (75).$$

Наконецъ скорости центра тяжести системы будутъ производныя отъ координатъ этой точки, т. е.

$$\frac{d\xi}{dt},\quad \frac{d\eta}{dt},\quad \frac{d\varphi}{dt} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (76).$$

Составимъ выраженіе для полной живой силы массы m; квадратъ ея скорости равенъ суммѣ квадратовъ ея проекцій (75); слѣд. живая сила будетъ

$$\frac{1}{2}m.\left\{\left(\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}$$

или, по раскрытіи квадратовъ двучленовъ:

$$\frac{1}{2}m.\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)+\left(\frac{dz}{dt}\right)+\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ +2.\ \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt}+2.\ \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt}+2.\ \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\end{array}\right\}$$

Теперь нужно просуммировать такія выраженія, распространяя ихъ на всѣ массы системы. Для различныхъ массъ получимъ, разныя координаты x, y, z, но величины, ξ, η, φ для всѣхъ массъ одинаковы. Имѣя это въ виду и вынося общіе множители за знакъ суммы, получимъ для живой силы системы выраженіе: T =

$$=\frac{1}{2}\Big\{.\,\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]+$$
$$+\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\Sigma m+$$
$$+2\frac{d\xi}{dt}\ \Sigma m\ \frac{dx}{dt}+2\frac{d\eta}{dt}\ \Sigma m\ \frac{dy}{dt}+2\ \frac{d\varphi}{dt}\ \Sigma m\ \frac{dz}{dt}\Big\}.$$

Но такъ какъ начало подвижной координатной системы проходитъ черезъ центръ тяжести системы, то, по опредѣленію такого центра имѣемъ:

$$\Sigma\ mx=0 \qquad \Sigma\ my=0 \qquad \Sigma\ mz=0.$$

Диференцируя по времени эти выраженія, находимъ:

$$\Sigma\, m\frac{dx}{dt}=0 \qquad \Sigma m\ \frac{dy}{dt}=0 \qquad \Sigma m\ \frac{dz}{dt}=0$$

Вслѣдствіе такихъ равенствъ уничтожаются три послѣдніе члена въ выраженіи T. Остается разсмотрѣть остальные два члена этого выраженія:

$$T_1=\frac{1}{2}\ \Sigma m.\ \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$\text{и } T_2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\Sigma m.$$

Такъ какъ

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2$$

есть скорость центра тяжести системы, а Σm означаетъ сумму всѣхъ массъ, составляющихъ систему, то T_2 представляетъ живую силу, которую система имѣла бы, если бы всѣ части ея двигались одинаково съ центромъ тяжести.

Далѣе видимъ, что величина

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

есть квадратъ скорости того движенія, которое масса m имѣесъ относительно центра тяжести системы. Слѣд. T_1 означаетъ живую силу для движенія системы относительно ея центра тяжести. Оказывается, что истинная живая сила системы равна суммѣ этихъ двухъ живыхъ силъ

$$T_1 + T_2,$$

что мы и желали доказать.

233. ***Живая сила поѣзда.*** Для примѣра возьмемъ движеніе желѣзнодорожнаго поѣзда. Кромѣ общаго поступательнаго движенія, одинаковаго съ центромъ тяжести, колеса имѣютъ еще вращательное движеніе. Пусть скорость поступательнаго движенія есть V; массу всего поѣзда, включая и колеса, назовемъ M; угловую скорость вращенія одного изъ колесъ означимъ буквою ω, а моментъ инерціи колеса относительно его оси назовемъ I. Живая сила поѣзда будетъ:

$$\frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \Sigma I \omega^2,$$

гдѣ сумма Σ должна быть распространена на всѣ колеса.

234. ***Работа силы тяжести.*** Эта внѣшняя сила встрѣчается въ приложеніяхъ очень часто, а потому подготовимъ общее выраженіе для ея работы въ произвольной системѣ. Назначимъ основную горизонтальную плоскость, къ которой будемъ относить высоты всѣхъ частей системы. Пусть одна изъ частицъ, имѣющая вѣсъ p, во время движенія перемѣстилась такъ, что ея первоначальная высота h_0 надъ основной плоскостью превратилась въ h. При этомъ вѣсъ p произведетъ работу, равную произведенію его на вертикальное перемѣщеніе

$$h_0 - h.$$

Сложимъ работы вѣсовъ всѣхъ частицъ системы; получимъ полную работу вѣса:

$$T = \Sigma p (h_0 - h) = \Sigma p h_0 - \Sigma p h \quad . \ . \ . \ . \ (76).$$

Назовемъ высоту центра тяжести системы для начала движенія H^0, а для конца его H; вѣсъ всей системы пусть будетъ P. По опредѣленію центра тяжести имѣемъ зависимости:

$$PH_0 = \Sigma p h_0$$
$$PH = \Sigma p h$$

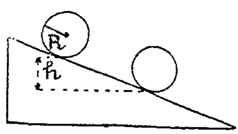
Подставимъ ихъ въ (76), тогда получимъ:

$$T = P (H_0 - H) \quad . \ . \ . \ (77)$$

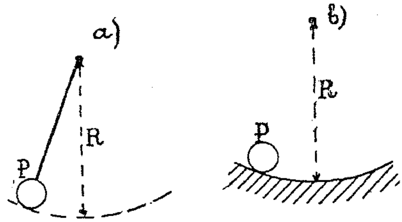
т. е. работа всѣхъ силъ тяжести въ системѣ равна произведенію изъ полнаго вѣса системы на пониженіе ея центра тяжести.

Если работа внутреннихъ силъ равна нулю, а кромѣ тяжести нѣтъ другихъ внѣшнихъ силъ, то выраженіе (77) изображаетъ величину Живой Силы, пріобрѣтенной системой при разсматриваемомъ перемѣщеніи.

235. *Примѣры.* Цилиндръ катится безъ скольженія по наклонной плоскости (фиг. 171). Радіусъ цилиндра назовемъ R, его массу—M, моментъ инерціи относительно оси его—J. Пусть начальная скорость равна нулю; по опусканіи цилиндра на высоту h



Фиг. 171.



Фиг. 172.

скорость его поступательнаго движенія получитъ нѣкоторую величину V; а въ то же время онъ пріобрѣтетъ нѣкоторую угловую скорость вращенія ω. Такъ какъ цилиндръ катится безъ скольженія, то между V и ω существуетъ зависимость

$$R\omega = V,$$

т. е.

$$\omega = \frac{V}{R}.$$

Живая сила цилиндра будетъ, на основаніи теоремы n° 232, равна суммѣ двухъ живыхъ силъ

$$\frac{1}{2}MV^2 \text{ и } \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}\,V^2.$$

Работа тяжести будетъ равна произведенію вѣса цилиндра Mg, на пониженіе его центра тяжести h. Получаемъ слѣдующе уравненіе живыхъ силъ:

$$\frac{1}{2}V^2\left(M + \frac{J}{R^2}\right) = Mg.h,$$

изъ котораго найдемъ скорость V, а, дѣля ее на R, получимъ угловую скорость. Получаемъ:

$$V^2 = 2\,gh.\,\frac{MR^2}{MR^2 + J}.$$

Если бы такое тѣло спускалось съ наклонной плоскости не вращаясь, то имѣли бы:

$$V^2 = 2gh$$

слѣд. вращеніе уменьшаетъ скорость V.

Аналогичный результатъ получимъ при сравненіи слѣдующихъ двухъ движеній (фиг. 172): a) маятникъ, состоящій изъ шара P, подвѣшеннаго на невѣсомой нити; b) тотъ же шаръ, катящійся по круговому желобку. Во второмъ случаѣ качанія будутъ медленнѣе, чѣмъ въ первомъ.

236. ***Тяжелая частица, движущаяся по винтовому желобку.*** Мы начали рѣшать эту задачу въ n° 152 и получили уравненіе (52):

$$\omega(A + ma^2) - amV.\ \mathrm{Cos}\,\varphi = 0.$$

Докончимъ ее, т. е. составимъ второе уравненіе связывающее неизвѣстныя V, ω. Для этого намъ послужитъ Законъ Живыхъ Силъ. Назовемъ моментъ инерціи цилиндра, несущаго винтовой желобокъ, относительно оси его черезъ J. Тогда живая сила этого цилиндра будетъ

$$\frac{1}{2}J.\,\omega^2 \ .\ .\ .\ (78).$$

Опускающаяся по желобку частица m получаетъ, какъ мы видѣли, скорость, состоящую изъ двухъ слагаемыхъ:

горизонтальной . . . $a\omega - V.\,\mathrm{Cos}\,\alpha$

вертикальной . . . . $V.\ \mathrm{Sin}\,\alpha.$

Сумма квадратовъ этихъ слагаемыхъ дастъ квадратъ полной скорости. Слѣд. живая сила частицы m будетъ

$$\frac{1}{2}m.\left\{(a\omega - V.\,\mathrm{Sin}\,\alpha)^2 + (V.\,\mathrm{Cos}\,\alpha)^2\right\} .\ .\ .\ (79).$$

Полная живая сила частицы и вращающагося цилиндра будетъ сумма выраженій (78) и (79).

Что касается работъ силъ, то здѣсь имѣемъ только работу вѣса частицы m; при опусканіи ея на высоту y, работа будетъ

$$mg.y.$$

Такъ какъ начальныя скорости по заданію нули, то уравненіе живыхъ силъ будетъ:

$$J.\,\omega^2 + m.\left\{(a\omega - V.\,\mathrm{Sin}\,\alpha)^2 + (V.\,\mathrm{Cos}\,\alpha)^2\right\} = 2\,mg.y\ .\ .\ (80).$$

Соединяя его съ (52) найдемъ обѣ скорости V и ω. Не трудно видѣть, что какъ опусканіе частицы m, такъ и вращеніе цилиндра будутъ происходить равно ускоренно.

237. *Устойчивость вращенія твердаго тѣла.* Мы знаемъ, что въ каждой точкѣ тѣла есть три главныя оси; онѣ владѣютъ тѣмъ свойствомъ, что, при вращеніи около нихъ силы инерціи взаимно уравновѣшиваются; т. е. для равновѣсія не требуются дополнительныя внѣшнія силы на опорахъ оси. Когда сообщено вращеніе около главной оси, то оно будетъ продолжаться по инерціи безъ перемѣны. Между тѣмъ если сообщено вращенія около не главной оси, то для поддержки его необходимы внѣшнія силы на оси. Если ихъ нѣтъ, то ось вращенія будетъ мгновенная, безпрестанно измѣняющая свое положеніе въ тѣлѣ и въ пространствѣ.

Только главныя оси владѣютъ свойствомъ быть постоянными осями, около которыхъ вращеніе поддерживается инерціей, безъ помощи внѣшнихъ силъ. Этимъ свойствомъ владѣютъ всѣ три главныя оси.

Но постоянство оси, при отсутствіи внѣшнихъ силъ, еще не означаетъ ея устойчивость. Этимъ послѣднимъ терминомъ мы означаемъ способность тѣла мало измѣнять свое вращеніе отъ дѣйствія на него небольшихъ толчковъ, т. е. отъ кратковременнаго приложенія къ нему небольшихъ силъ.

Положимъ, что первоначально тѣло вращалось около главной оси, и что дѣйствіемъ толчка ось вращенія измѣнилась, т. е. тѣло послѣ толчка вращается около мгновенной, безпрестанно перемѣняющейся оси. Сейчасъ послѣ толчка эта мгновенная ось по необходимости очень близка къ первоначальной оси, такъ какъ предполагаемъ небольшой толчокъ. Иногда затѣмъ, съ теченіемъ времени, мгновенная ось постепенно удаляется отъ первоначальной, и въ скоромъ времени это удаленіе дѣлается очень замѣтнымъ; тогда мы говоримъ, что первоначальная ось вращенія была неустойчивая. Если же послѣ толчка мгновенная ось, хотя съ теченіемъ времени измѣняетъ свое положеніе въ тѣлѣ и въ пространствѣ, но тѣмъ не менѣе отклоненіе ея отъ первоначальной оси все время остается очень малымъ, то мы называемъ первоначальную ось устойчивой.

238. Разсмотримъ общій случай, когда три момента инерціи A, B, C для главныхъ осей не равны между собою. Изъ этихъ трехъ моментовъ одинъ наибольшій, другой — наименьшій, а третій—средній. Легко доказать, что какъ ось наибольшаго момента, такъ и ось наименьшаго момента будутъ устойчивы.

Для доказательства мы кромѣ Закона Живыхъ Силъ примѣнимъ Законъ Моментовъ Количествъ Движенія.

Пусть первоначально тѣло вращалось около первой главной оси, обладающей моментомъ инерціи A, и имѣло угловую скорость p_0. Начальная величина живой силы есть

$$Ap_0^2;$$

начальный моментъ количествъ движенія для первой оси равенъ

$$Ap_0,$$

а для двухъ другихъ осей этотъ моментъ равенъ нулю.

Послѣ толчка тѣло будетъ вращаться около нѣкоторой мгновенной оси, не совпадающей съ главными. Скорость вращенія около мгновенной оси можемъ разложить на три скорости по главнымъ осямъ; эти слагающія (онѣ перемѣнныя) назовемъ

$$p,\ q,\ r.$$

Тогда живая сила послѣ толчка будетъ (см. n^0 231)

$$T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Моментъ Количества Движенія послѣ толчка будетъ имѣть своими проекціями на главныя оси величины (см. n^0 161)

$$Ap,\quad Bq,\quad Cr.$$

Полная же величина Момента Количествъ Движенія μ получится, какъ равнодѣйствующая трехъ проекцій, т. е. будетъ

$$\mu = (Ap)^2 + (Bq)^2 + (Cr)^2.$$

Послѣ толчка тѣло опять предоставлено самому себѣ, и внѣшнія силы на него не дѣйствуютъ. Слѣд. при дальнѣйшемъ движеніи какъ живая сила его T, такъ и полный моментъ количествъ движенія μ, должны сохранять постоянныя величины. Притомъ эти величины должны очень мало отличаться отъ первоначальныхъ значеній живой силы и момента количествъ движенія, имѣвшихся до толчка, такъ какъ толчокъ по предположенію очень не великъ.

Будемъ считать толчокъ безконечно малымъ; тогда, обозначая черезъ α и β безконечно малыя величины получимъ:

1) Условіе постоянства живой силы:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = Ap_0^2 + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81).$$

2) Условіе постоянства Момента Количествъ Движенія:

$$(Ap)^2 + (Bq)^2 + (Cr)^2 = (Ap_0)^2 + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82).$$

Исключимъ изъ этихъ уравненій p и p_0; для этого (81) нужно умножить на A и затѣмъ вычесть (82) изъ (81). Получимъ:

$$B(A-B)\,q^2 + C(A-C)\,r^2 = \beta - \alpha \,.\;.\;.\;.\;.\;(83),$$

гдѣ $\beta - \alpha$ безконечно малая величина.

До сихъ поръ мы не говорили ничего о сравнительной величинѣ моментовъ инерціи A, B, C. Теперь предположимъ, что A наибольшій изъ нихъ; слѣд. первоначально вращеніе происходило около оси наибольшаго момента инерціи. Тогда

$$A - B > 0 \qquad A - C > 0$$

слѣд. оба члена лѣвой части ур. (83) положительные. А такъ какъ сумма ихъ должна быть безконечно мала, то и каждый изъ членовъ долженъ быть безконечно малъ. Отсюда слѣдуетъ, что q и r должны быть безконечно малы. Итакъ, во все время движенія по инерціи послѣ толчка, скорости q и r безконечно малы; а такъ какъ вращеніе послѣ толчка состоитъ изъ трехъ слагающихъ.

$$p, \quad q, \quad r,$$

то очевидно направленіе мгновенной оси вращенія въ тѣлѣ будетъ безконечно мало отличаться отъ первой главной оси, имѣющей моментомъ инерціи A, т. е. отъ первоначальной оси вращенія.

Не трудно доказать, что и въ пространствѣ направленіе мгновенной оси будетъ все время очень близко къ первоначальному направленію оси вращенія. Для этого разсмотримъ направленіе Вектора Моментовъ Количествъ Движенія. До толчка этотъ векторъ совпадалъ съ первоначальнымъ направленіемъ той главной оси тѣла, около которой происходило вращеніе. Толчокъ могъ измѣнить направленіе Вектора Моментовъ Количествъ Движенія въ пространствѣ лишь безконечно мало. Послѣ толчка внѣшнія силы не дѣйствуютъ, слѣд. положеніе указаннаго Вектора неизмѣнно. Но онъ получается какъ равнодѣйствующій изъ трехъ моментовъ по главнымъ осямъ

$$Ap, \qquad Bq, \qquad Cr,$$

слѣд. направленіе равнодѣйствующей этихъ трехъ векторовъ можетъ лишь безконечно мало отличаться отъ первоначальной оси вращенія. А такъ какъ Bq и Cr величины безконечно малыя, то направленіе скорости p, слѣд. и мгновенной оси, можетъ лишь безконечно мало отличаться отъ первоначальной оси вращенія.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что въ движеніи, происходящемъ послѣ толчка, мгновенная ось вращенія и въ тѣлѣ и въ пространствѣ будетъ лишь безконечно мало отклоняться отъ первоначальной оси вращенія. Слѣд. эта ось т. е. ось наибольшаго момента инерціи, устойчива,

Возьмемъ теперь случай, когда первоначально вращеніе происходило около оси наименьшаго момента инерціи. Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$A < B < C,$$

слѣд. въ уравненіи (83) члены

$$B\ (A-B)\ q^2,\ C\ (A-C)\ r^2$$

оба отрицательные. А такъ какъ ихъ сумма равна безконечно малой величинѣ $\beta-\alpha$, то каждый изъ этихъ двухъ членовъ долженъ быть безконечно малъ; отсюда слѣдуетъ, что q и r безконечно малы. Однимъ словомъ мы можемъ буквально повторить всѣ предъидущія разсужденія и убѣдимся, что ось наименьшаго момента инерціи также устойчива.

Но если первоначальное вращеніе происходитъ около главной оси, имѣющей такой моментъ A, что

$$C < A < B,$$

то въ уравненіи (83) членъ

$$C\ (A-C)\ r^2$$

положительный, а другой членъ

$$B\ (A-B)\ q^2$$

отрицательный. Поэтому здѣсь мы не можемъ сдѣлать заключеніе, что q и r безконечно малы. Слѣд. здѣсь не примѣнимы и всѣ послѣдующія разсужденія, помощію которыхъ мы доказывали, что оси наибольшаго и наименьшаго момента инерціи— устойчивы. Для оси, имѣющей средній моментъ инерціи, необходимъ отдѣльный, особый разборъ вопроса. Мы его не будемъ дѣлать, а укажемъ только на результатъ: оказывается, что эта ось неустойчивая.

239. *Случай тѣла вращенія.* Въ этомъ случаѣ два главныхъ момента инерціи равны между собою; напр.

$$B = C.$$

Третій главный моментъ инерціи, а именно моментъ инерціи тѣла для его оси фигуры, или больше остальныхъ двухъ или меньше ихъ обоихъ, т. е. онъ или наибольшій или наименьшій. Разсужденіе предъидущаго n° показываетъ, что ось фигуры будетъ всегда устойчива. Можно было бы доказать, что остальныя главныя оси—неустойчивы.

240. *Теорема Даніила Бернулли.* Прилагая Законъ Живыхъ Силъ къ установившемуся движенію жидкости, получимъ теорему Д. Бернулли. Это основная, главная теорема Гидродинамики, имѣющая многочисленныя приложенія при изученіи теченія воды въ рѣкахъ, каналахъ, трубахъ, при изслѣдованіи дѣйствія воды въ водяныхъ двигателяхъ и т. д. До недавняго времени эта теорема была почти единственный теоретическій результатъ, которымъ пользовались въ гидравлическихъ приложеніяхъ. Не доказывая эту теорему въ общемъ видѣ, ограничимся той частной фомой ея, которая имѣетъ значеніе въ Гидравликѣ.

Поставимъ точныя условія, при которыхъ имѣетъ мѣсто послѣдующій выводъ. Мы разсматриваемъ жидкость идеальную, т. е. во-первыхъ несжимаемую, а во-вторыхъ не представляющую никакого сопротивленія такимъ измѣненіямъ формы, которыя не сопровождаются измѣненіемъ объема; слѣд. это жидкость, совершенно лишенная вязкости. Заданіе такихъ свойствъ жидкости приводитъ къ тому, что работа внутреннихъ силъ ея равна нулю. Мы также допустимъ отсутствіе тренія между жидкостью и стѣнками сосуда или трубы въ которыхъ течетъ жидкость.

Мы разсматриваемъ движеніе вполнѣ установившееся, т. е. въ каждой точкѣ пространства, наполненнаго жидкостью, явленія не измѣняются съ теченіемъ времени; направленіе и величина скорости въ этой точкѣ, величина внутренняго давленія у этой точки—остаются постоянными во все время движенія.

Разбираемъ движеніе тяжелой жидкости въ сосудѣ любой формы ABDC (фиг. 173) между сѣченіями AB и CD и предполагаемъ выполненными слѣдующія условія: 1) отсутствіе вихрей въ объемѣ ABDC, т. е. допускаемъ движеніе правильными струями; 2) давленіе по всему сѣченію AB одно и то же (p_1), и всѣ частицы, проходящія черезъ AB, имѣютъ одну и ту же скорость (V_1), направленную нормально къ AB; 3) тѣ же условія выполнены и въ сѣченіи CD; здѣсь давленіе p_2, скорость V_2.

Въ теченіи безконечно малаго времени dt частицы, которыя были расположены въ сѣченіи AB, пройдутъ путь

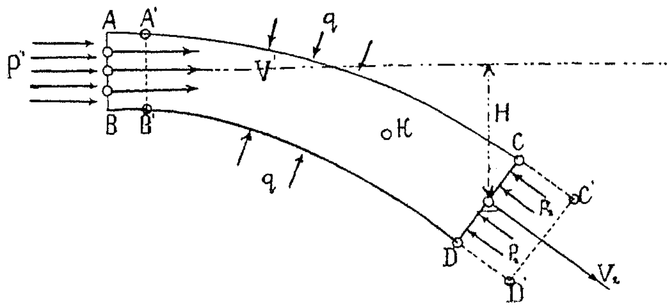
$$V_1 \,.\, dt$$

и придутъ въ $A'B'$. Частицы, находившіяся въ сѣченіи CD, пройдутъ путь

$$V_2 \, . \, dt$$

и займутъ положеніе $C'D'$. Примѣнимъ Законъ Живыхъ Силъ къ этому движенію массы жидкости $ABDC$, передвинувшейся въ $A'B'D'C'$.

Начальная живая сила нашей системы состоитъ изъ двухъ



Фиг. 173.

частей: живой силы жидкости $ABB'A'$ и живой силы жидкости $A'B'DC$. Окончательная живая сила тоже можетъ быть разсматриваема какъ совокупность двухъ частей: живой силы жидкости $A'B'DC$ и живой силы жидкости $CDD'C'$. Мы видимъ, что живая сила объема $A'B'DC$ входитъ какъ въ выраженіе начальной живой силы, такъ и въ выраженіе окончательной живой силы; притомъ въ обоихъ выраженіяхъ живая сила этого объема одна и та же, потому что движеніе жидкости установившееся, т. е. скорость жидкости въ любой точкѣ K этого объема одинакова какъ для начальнаго момента времени, такъ и для окончательнаго. При нахожденіи живой силы, пріобрѣтенной за время dt, мы должны вычесть начальную живую силу изъ окончательной; при этомъ сократится живая сила объема $A'B'DC$, и останется только разность живыхъ силъ объемовъ

$$CDD'C' \text{ и } ABB'A'.$$

Эти объемы равны между собою, такъ какъ жидкость не сжимаема. Если назовемъ буквою Q объемъ жидкости, протекающей черезъ каждое сѣченіе въ единицу времени, то указанные объемы будутъ

$$Q \, . \, dt.$$

Вѣсъ единицы объема жидкости назовемъ $\triangle$, тогда масса жидкости протекающей въ одну секунду будетъ

$$Q.dt. \frac{\triangle}{g} ;$$

наконецъ искомая пріобрѣтенная живая сила выразится разностью:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\triangle}{g} Q.dt(V_2^2 - V_1^2).$$

Перейдемъ къ работѣ дѣйствовавшихъ силъ. Уже видѣли, что работа внутреннихъ силъ въ идеальной жидкости равна нулю. Также обращается въ нуль работа давленій q, производимыхъ на жидкость стѣнками сосуда или трубы, въ которой она течетъ; эти давленія всегда перпендикулярны къ пути, проходимому частицами, движущимися по стѣнкамъ, если движеніе происходитъ правильной струей; слѣд. сила и перемѣщеніе взаимно перпендикулярны, то есть работа равна нулю. Остаются только работа вѣса и работа давленій p_1, p_2 на сѣченіяхъ AB, CD, которыми ограничена наша движущаяся система.

Для полученія работы вѣса нужно взять вѣсъ всей жидкости ABDC и умножить на пониженіе ея центра тяжести, происходящее при переходѣ изъ ABDC въ положеніе A′B′D′C′. Замѣтимъ опять, что въ обоихъ положеніяхъ имѣемъ общій объемъ

$$A'B'DC,$$

который какъ бы вовсе не перемѣстился, такъ что центръ тяжести его остался на прежней высотѣ. Поэтому разсматриваемое перемѣщеніе жидкости эквивалентно тому, какъ будто бы объемъ элементарной части

$$ABB'A'$$

опустился и занялъ положеніе

$$CDD'C'.$$

Произведенная при этомъ работа равна вѣсу элементарной части, т. е.

$$Q \cdot dt \cdot \triangle,$$

умноженному на пониженіе центра тяжести объема ABB′A′ при опусканіи его въ положеніе CDD′C′. Это пониженіе, при отбрасываніи безконечно малыхъ высшихъ порядковъ, можетъ считаться равнымъ разности H уровней центровъ тяжести предѣльныхъ сѣченій AB и CD. И такъ работа вѣса будетъ

$$Q \cdot dt \cdot \triangle \cdot H.$$

Работа давленій p_1 на сѣченіе AB получится слѣд. образомъ: p_1 означаетъ давленіе на единицу площади, а если сѣченіе AB имѣетъ площадь Ω, то полное давленіе будетъ

$$p_1 . \Omega.$$

Его нужно умножить на пройденный путь, т. е. на

$$V_1 dt;$$

получимъ работу

$$p_1 \Omega . V_1 dt.$$

На произведеніе

$$\Omega V_1$$

есть объемъ жидкости, протекающей въ единицу времени Q, слѣд. работа будетъ

$$p_1 \, Q . dt.$$

Она положительная, такъ какъ направленіе силы совпадаетъ съ направленіемъ перемѣщенія.

Работа давленія p_2 найдется подобнымъ же образомъ и будетъ

$$-p_2 Q . dt.$$

Она отрицательная, такъ какъ здѣсь сила идетъ противуположно перемѣщенію.

Собирая въ одно всѣ работы, получимъ сумму ихъ

$$Q . dt . (\triangle . H + p_1 - p_2).$$

Уравнивая это выраженіе пріобрѣтенной живой силѣ, получаемъ уравненіе живыхъ силъ

$$\frac{Qdt}{2} . \frac{\triangle}{g} (V_2^2 - V_1^2) = Q . dt (\triangle . H + p_1 - p_2)$$

или по сокращеніи:

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\triangle} \right).$$

Оно и выражаетъ теорему Даніила Бернулли.

Величины

$$\frac{p_1}{\triangle}, \ \frac{p_2}{\triangle}$$

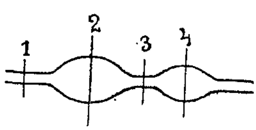
измѣряютъ давленія, имѣющіяся въ жидкости въ сѣченіяхъ AB и CD. На самомъ дѣлѣ, p_1 и p_2 представляютъ эти давленія въ единицахъ силъ, приходящихся на единицу площади (напр., килогр. на квад. сант); дѣля ихъ на $\triangle$, получимъ высоты столба жидкости, уравновѣшивающей такія давленія. Такое измѣреніе давленія жидкости высотой столба ея же часто примѣняется; приборы, производящіе такое измѣреніе называются пьезометрами; высота столба въ нихъ называется пьезометрической высотой *). Означая эти высоты для сѣченій AB и CD черезъ h_1, h_2, получаемъ теорему Бернулли въ формѣ

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g\,(H + h_1 - h_2) \quad . \ . \ . \ . \ (84),$$

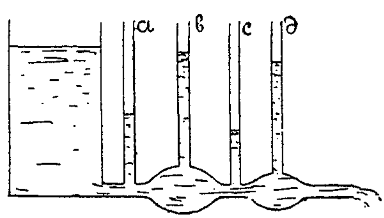
т. е. при движеніи жидкости отъ AB къ CD пріобрѣтается такая же скорость, какъ при паденіи тяжелаго тѣла съ высоты

$$H + h_1 - h_2.$$

241. При выводѣ мы допустили, что какъ въ сѣченіи AB, такъ и для CD, скорости всѣхъ частицъ параллельны между собою. Поэтому наше уравненіе можно примѣнять не къ любымъ двумъ сѣченіямъ трубы, по которой течетъ жидкость, а только къ тѣмъ, которые удовлетворяютъ этому условію, напр., для фиг. 174, къ сѣченіямъ, отмѣченнымъ цифрами 1, 2, 3, 4.



Фиг. 174.



Фиг. 175.

242. Возьмемъ частный случай; пусть ось трубы будетъ горизонтальная прямая (фиг. 175); тогда для каждыхъ двухъ сѣченій ея разность уровней H будетъ нуль, и мы получаемъ изъ уравненія (84) слѣдующее условіе:

$$\frac{V_2^2}{2g} + h_2 = \frac{V_1^2}{2g} + h_1.$$

---

*) Обыкновенно пьезометръ измѣряетъ не полную величину давленія, превышеніе этого давленія надъ атмосфернымъ.

И такъ сумма пьезометрической высоты и величины

$$\frac{V^2}{2g}$$

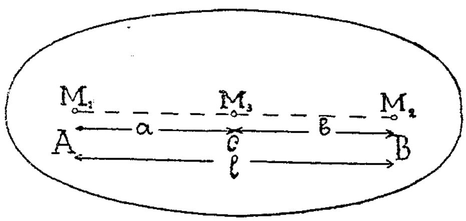
(т. е. высоты, отвѣчающей скорости теченія) будетъ одинакова для сѣченій трубы, отмѣченныхъ на фиг. 175 цифрами 1, 2, 3, 4. Но скорости теченія по трубѣ измѣняются обратно пропорціонально площадямъ сѣченій. Отсюда слѣдуетъ, что пьезометрическая высота будетъ измѣняться одновременно съ измѣненіемъ поперечныхъ сѣченій и въ ту же сторону, т. е. пьезометрическая высота будетъ значительна тамъ, гдѣ происходитъ расширеніе трубы; эта высота будетъ малая въ съуженныхъ мѣстахъ трубы. Этотъ результатъ хорошо демонстрируется приборомъ (фиг. 175), въ которомъ происходитъ истеченіе окрашенной жидкости, при постоянномъ напорѣ. Стеклянныя трубочки a, b, c..., поставленныя въ разныхъ мѣстахъ по длинѣ теченія, указываютъ пьезометрическія высоты, т. е. давленія, въ этихъ мѣстахъ.

Если въ одномъ мѣстѣ трубки (фиг. 175) сѣченіе будетъ очень сильно съужено по сравненію съ выходнымъ отверстіемъ, въ которомъ давленіе равно атмосферному, то въ съуженномъ сѣченіи давленіе можетъ оказаться значительно ниже атмосфернаго. Дѣлая опытъ съ водою при обыкновенной комнатной температурѣ, можемъ достигнуть такого пониженія давленія, что вода въ съуженномъ сѣченіи будетъ кипѣть. Такой опытъ былъ произведенъ Осборнъ Рейнольдсомъ.

243. ***Примѣненіе Закона Живыхъ Силъ къ изученію движенія машинъ.*** При изученіи движенія машинъ для перваго приближенія пренебрегаютъ упругостью частей машины, и считаютъ ихъ тѣлами абсолютно жесткими. Такъ какъ машина, состоящая изъ связанныхъ между собою жесткихъ тѣлъ, почти всегда есть система съ полными связями, т. е. система съ одной степенью свободы, то движеніе ея опредѣляется одной перемѣнной, а потому, для изслѣдованія движенія машины достаточно одного уравненія. За такое уравненіе обыкновенно берутъ уравненіе живыхъ силъ; оно очень удобно для этой цѣли, такъ какъ прямо даетъ скорости, т. е. тѣ именно элементы движенія, которые имѣютъ особое значеніе въ практическомъ употребленіи машинъ, при ихъ службѣ.

Въ машинахъ всего чаще встрѣчаются движенія—поступательное и вращательное, для которыхъ выраженіе живой силы получается очень просто. Движенія, не относящіяся къ этимъ двумъ разрядамъ, почти всегда представляютъ плоскія движенія; слѣд. это необходимо будутъ вращенія около мгновеннаго центра. Зная положеніе мгновеннаго центра, мы могли бы выразить живую силу, какъ произведеніе угловой скорости на моментъ инерціи относительно этого центра. При этомъ придется опредѣлять моменты инерціи для различныхъ центровъ, измѣняющихъ свое положеніе въ тѣлѣ; но всѣ эти моменты инерціи легко опредѣляются, когда извѣстенъ моментъ инерціи для центра тяжести тѣла; для этого нужно воспользоваться теоремой выведенной въ n° 187.

244. Здѣсь очень удобенъ слѣдующій пріемъ: тѣло (фиг. 176) замѣняется тремя массами M_1, M_2, M_3, сосредоточенными въ центрѣ тяжести C и въ двухъ точкахъ A, B, лежащихъ на одной прямой съ центромъ тяжести. Подберемъ массы M_1, M_2, M_3



Фиг. 176.

такъ, что сумма ихъ равна массѣ нашего тѣла, а сумма ихъ моментовъ инерціи для точки C равна моменту инерціи тѣла для той же точки. Тогда, на основаніи теоремы n° 192, и для всякой другой точки моменты инерціи нашего тѣла и полученной системы изъ трехъ массъ будутъ равны между собою.

Подборъ массъ сдѣлаемъ такимъ образомъ (фиг. 176): пусть J есть моментъ инерціи нашего тѣла для его центра тяжести; обозначимъ разстоянія AC, CB, AB буквами a, b, l. Тогда нужно взять:

$$M_1 = \frac{J}{al}$$

$$M_2 = \frac{J}{bl}.$$

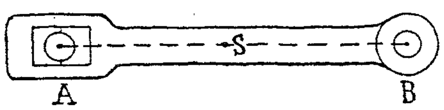
Третья масса M_3 получится какъ остатокъ по вычитаніи $M_1 + M_2$ изъ полной массы тѣла M.

Дѣйствительно при такомъ подборѣ получаемъ, что моментъ инерціи нашей системы трехъ массъ для центра тяжесит С будетъ:

$$M_1\ a^2 + M_2\ b^2 =$$
$$J\left(\frac{a}{l} + \frac{b}{l}\right) = J$$

что и требуется.

Точки A, B могутъ быть выбраны гдѣ угодно на линіи проходящей черезъ С. Въ частномъ случаѣ шатуна паровой машины (фиг. 177) самое удобное для A и B выбрать центры цапфъ.



Фиг. 177.

Изслѣдованіе движенія машинъ при помощи Закона Живыхъ Силъ значительно облегчается примѣненіемъ графическаго метода, который излагается во всѣхъ курсахъ Прикладной Механики. Очень удобный графическій способъ для нахожденія скоростей разныхъ точекъ плоскаго механизма находится въ сочиненіяхъ:

O. Mohr. Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik. IV-te Abhandlung. R. N. Smith. Graphics, or the Artof Calculation by drawing Lines. Изъ новыхъ работъ по этому вопросу заслуживаютъ вниманія статьи профессора Wittenbauer'a *)

---

*) См. F. Wittenbauer. Graphishe Dynamik der Getriebe, въ Zeitschrift für Mathematik und Physik· Band. 50. Его же. Die graphische Ermittelung des Schwungradgewichtes, въ Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1905 года (s. 471).

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

Законъ сохраненія энергіи.

245. Законъ сохраненія энергіи, т. е. ученіе о постоянствѣ энергіи въ природѣ, есть универсальный физическій законъ, охватывающій всѣ разнообразныя физическія явленія. Онъ установленъ главнымъ образомъ экспериментально, на основаніи массы опытовъ и наблюденій, показавшихъ, что энергія никогда не теряется; въ случаяхъ кажущагося исчезновенія ея, всегда можно установить, что здѣсь произошло не уничтоженіе энергіи, а преобразованіе ея въ другую форму, притомъ въ эквивалентномъ количествѣ. Сюда относятся преобразованіе чисто механической энергіи въ теплоту, свѣтъ, электричество и всѣ прочія взаимныя преобразованія этихъ видовъ энергіи, химической энергіи и т. д.

При установленіи закона сохраненія энергіи существенную роль, кромѣ опыта, играли еще теоретическія соображенія; большинствомъ изслѣдователей руководило убѣжденіе, что всѣ физическія явленія—теплота, свѣтъ, электричество и т. д.—въ сущности представляютъ явленія движенія, только невидимаго для насъ, а потому всѣ эти явленія подчинены законамъ динамики. Всегда господствовала вѣра въ то, что динамическіе законы распространяются и на тѣ гипотетическія невидимыя, незамѣтныя движенія, которыя мы называемъ теплотой, свѣтомъ и т. д. Когда, для объясненія нѣкоторыхъ явленій, допускали существованіе невидимыхъ тѣлъ—свѣтоваго эфира—то не сомнѣвались, что, несмотря на свою невѣсомость, онъ имѣетъ массу и подчиняется общимъ законамъ Динамики. А эти законы для явленій движенія даютъ начало сохраненія энергіи, и такимъ образомъ теоретическіе взгляды привели къ результату, согласному съ тѣмъ, что было получено экспериментальнымъ путемъ. Такова исторія этого основного закона физическихъ явленій.

246. Мы будемъ говорить о Законѣ Сохраненія Энергіи только съ точки зрѣнія Динамики, нисколько не касаясь опыта. Мы только покажемъ, при какихъ условіяхъ и предположеніяхъ или допущеніяхъ, Динамика приводитъ къ Закону Сохраненія Энергіи.

Это динамическое ученіе ведетъ свое начало отъ Ньютона. Нѣкоторые англійскіе авторы даже прямо приписываютъ Ньютону открытіе этого закона; „принципъ сохраненія энергіи такъ же старъ, какъ Ньютонъ", говоритъ Оливеръ Гевисайдъ. Хотя въ такомъ утвержденіи заключается значительная доля увлеченія, но несомнѣнно основаніемъ принципа сохраненія энергіи служитъ молекулярная гипотеза, поставленная Ньютономъ какъ общій законъ всѣхъ явленій природы.

247. *Молекулярная гипотеза.* Гипотеза эта изложена не въ Principia, а въ другомъ позднѣйшемъ сочиненіи Ньютона, въ его Оптикѣ *). Въ концѣ этой книги Ньютонъ ставитъ рядъ вопросовъ (Queries), куда отнесены имъ всѣ гипотезы и положенія, которыя онъ поставилъ и хотѣлъ провѣрить, но не имѣлъ возможности сдѣлать это. Онъ опубликовалъ ихъ затѣмъ, чтобы другіе могли сдѣлать такую провѣрку.

Молекулярная гипотеза содержится въ 31-мъ вопросѣ. Ньютонъ, найдя, что взаимное притяженіе небесныхъ тѣлъ прекрасно объясняетъ движеніе планетъ, естественно былъ приведенъ къ идеѣ попытаться, нельзя ли и другія явленія объяснить притягательными и отталкивательными силами. Вопросъ 31-й состоитъ въ слѣдующемъ:

„Не заключаются ли въ мелкихъ частицахъ тѣлъ нѣкоторыя силы, посредствомъ которыхъ онѣ (частицы) дѣйствуютъ вдаль не только на лучи свѣта, чтобы ихъ отражать, преломлять и изгибать, но также взаимно одна на другую, и этимъ вызываютъ большую часть явленій природы?"

Затѣмъ Ньютонъ разсматриваетъ рядъ разнообразныхъ явленій—всемірное тяготѣніе, электричество, магнитизмъ, капиллярныя явленія, химическія явленія, образованіе кристалловъ изъ растворовъ и т. д.—и приходитъ къ заключенію, что его гипотеза очень вѣроятна. „Такимъ образомъ,—говоритъ онъ,—природа всегда одинакова и проста въ своихъ средствахъ, такъ какъ и крупныя движенія небесныхъ тѣлъ она вызываетъ посредствомъ ихъ взаимныхъ притяженій, и всѣ мелкія движенія частицъ она

*) Нѣмецкій переводъ въ собраніи классиковъ Оствальда, №№ 96, 97.

производитъ помощію нѣкоторыхъ особыхъ притягательныхъ и отталкивающихъ силъ, дѣйствующихъ между этими частицами“.

„Эти нѣсколько страницъ въ теченіи полутора столѣтія руководили ходомъ физическихъ теорій“, говоритъ Дюгемъ про 31-й вопросъ Оптики Ньютона. Молекулярная теорія долгое время считалась абсолютной истиной, выводамъ ея придавали бо̀льшую вѣру, чѣмъ даннымъ опыта, и тѣ факты, которые не согласовались съ теоріей, объясняли неправильностью или неполнотою наблюденія.

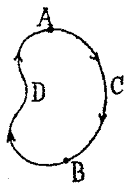
248. Характеръ гипотетическихъ молекулярныхъ силъ мы уже описывали въ 13-й бесѣдѣ. Предполагается, что эти силы зависятъ исключительно отъ разстояній между частицами. Внутреннія частичныя силы производятъ нѣкоторую работу, сообразно съ измѣненіемъ взаимнаго расположенія частицъ. Но если, послѣ различныхъ измѣненій, частицы получаютъ свое первоначальное расположеніе, то сумма работъ всѣхъ внутреннихъ силъ, произведенная за все время этихъ измѣненій, есть нуль. А поэтому измѣненіе живой силы, происшедшее за это время, будетъ тоже равно нулю, если всѣ силы нашей системы имѣютъ такой характеръ. Этотъ случай получается для изолированной системы, въ которой нѣтъ внѣшнихъ силъ, а дѣйствуютъ исключительно молекулярныя, частичныя силы.

Совокупность такихъ движеній системы, при которыхъ ея частицы подъ конецъ движенія занимаютъ такое же расположеніе какое онѣ имѣли въ началѣ, мы назовемъ круговымъ процессомъ. И такъ при круговомъ процессѣ работа внутреннихъ силъ равна нулю; эти силы всегда исключаются помощію круговаго процесса, каковъ бы онъ ни былъ. Отсюда слѣдствіе:

Первая теорема. Живая сила въ концѣ кругового процесса такая же, какая была при началѣ процесса.

249. Обозначимъ, для облегченія изложенія, начальное состояніе системы знакомъ А; какое нибудь промежуточное положеніе ея, посреди кругового процесса, назовемъ В. Система исходитъ изъ положенія А, рядомъ измѣненій переходитъ въ положеніе В, а затѣмъ постепенно возвращается въ начальное положеніе А. Но путь возвращенія изъ В въ А можетъ быть совсѣмъ иной, чѣмъ путь по которому система переходила изъ начальнаго положенія въ В. Здѣсь подъ словомъ путь системы нужно понимать совокупность измѣненій и движеній всѣхъ ея частей. Для одной точки системы представлено на фиг. 178, какъ эта точка переходитъ изъ А въ В по пути АСВ, а воз-

вращается изъ B въ A по другому пути BDA; то же возможно и для остальныхъ точекъ системы.



Фиг. 178.

Совокупность измѣненій системы изъ A въ B, и обратно изъ B въ A, составляетъ круговой процессъ, слѣд. работа для всего процесса равна нулю т. е. сумма работъ для пути ACB и для пути BDA есть нуль. Отсюда слѣдуетъ, что работа для пути ACB равна и по знаку противуположна работѣ для пути BDA.

Теперь обратимъ явленіе; начиная изъ начальнаго положенія A поведемъ измѣненіе дальше по пути ADB противуположному прежнему пути BDA. Работа при этомъ сохранитъ туже величину, но перемѣнитъ знакъ. Дѣйствительно, по гипотезѣ относительно молекулярныхъ силъ, онѣ зависятъ исключительно отъ разстояній между частицами; для прямого и обратнаго пути при соотвѣтствующихъ положеніяхъ будутъ повторяться тѣ же величины и направленія силъ; величины перемѣщеній повторяются тѣ же, но направленія перемѣщеній измѣнятся на противныя. Поэтому всѣ элементарныя работы перемѣнятъ знакъ, а потому сумма ихъ измѣнитъ знакъ, но величина ея останется прежняя. Здѣсь произойдетъ для всей системы то же, что было описано для двухъ частицъ въ n° 227. И такъ работа силъ системы, для пути ADB, равна работѣ для обратнаго пути BDA, но онѣ различаются знаками. Но мы получили совершенно такое же соотношеніе, сравнивая работы по ACB и по BDA. Отсюда слѣдуетъ, что работы для путей ACB и ADB одинаковы по величинѣ, и согласны по знаку.

Путь ACB и путь ADB имѣютъ одинаковое начало (состояніе A) и одинаковый конецъ (состояніе B). Они различаются только промежуточными положеніями. Такимъ образомъ полученный нами результатъ можетъ быть высказанъ въ формѣ слѣдующей теоремы, являющейся послѣдствіемъ гипотезы о характерѣ молекулярныхъ силъ.

Вторая теорема. Работа произведенная внутренними силами системы при переходѣ ея изъ какого нибудь положенія A въ любое другое положеніе B, не зависитъ отъ пути, по которому происходитъ такой переходъ. Для всѣхъ путей эта работа одинакова.

250. Силы, для которыхъ имѣютъ мѣсто первая и вторая теоремы, называются консервативными силами, а системы, въ которыхъ всѣ силы консервативны, называются консервативными

системами. И такъ, принятая нами гипотеза относительно молекулярныхъ силъ равносильна предположенію, что всѣ силы природы имѣютъ консервативный характеръ и въ природѣ всякая изолированная система будетъ консервативная.

251. *Уравненіе Живыхъ Силъ для консервативной системы.* Начнемъ съ какого нибудь начальнаго положенія системы, которое назовемъ нулевымъ; живую силу всей системы для этого положенія обозначимъ.

$$ЖС_0$$

Для положеній А и В употребимъ подобныя же обозначенія, но съ буквами А, В вмѣсто нуля, т. е. живыя силы означимъ:

$$ЖС_A,\ ЖС_B.$$

Работу всѣхъ силъ, при переходѣ изъ положенія 0 въ положеніе А, назовемъ

$$P_A.$$

а такую же работу для перехода изъ нулеваго положенія въ В обозначимъ

$$P_B.$$

Тогда Уравненіе Живыхъ Силъ для перехода изъ положенія О въ положеніе А будетъ:

$$Ж.С_A - Ж.С_0 = P_A \quad . \ . \ . \ (84).$$

А для перехода изъ нулеваго положенія въ В получимъ уравненіе живыхъ силъ:

$$Ж.С_B - ЖС_0 = P_B \quad . \ . \ . \ (85).$$

Вычитая (84) изъ (85), находимъ:

$$Ж.С_B - Ж.С_A = P_B - P_A$$

или

$$Ж.С_B - P_B = Ж.С_A - P_A \quad . \ . \ . \ (86).$$

Живыя силы всегда величины положительныя; что же касается работъ

$$P_B,\ P_A$$

то онѣ могутъ быть какъ положительными, такъ и отрицательными. Чтобы избавиться отъ отрицательныхъ величинъ, прибавимъ къ обѣимъ частямъ ур. (86) постоянную величину С, которую подберемъ такъ, чтобы величины

$$C - P_B \text{ и } C - P_A,$$

которыя обозначимъ

$$П_B \text{ и } П_A$$

были положительныя для всѣхъ положеній системы. Тогда уравненіе получитъ видъ

$$ЖС_В + П_В = ЖС_А + П_А \quad . \; . \; . \; (87),$$

т. е. оказывается, что для любого положенія системы сумма живой силы и величины П одинакова. Величина П, опредѣляемая работой внутреннихъ силъ, владѣетъ тѣмъ свойствомъ, что значеніе ея для положенія В опредѣляется исключительно этимъ положеніемъ и не зависитъ отъ положенія А и отъ другихъ возможныхъ положеній системы. Величины

$$П_В \, , \; П_А$$

называются потенціальными, или запасными, энергіями системы для положеній В, А. Живая сила называется кинетической энергіей системы. И такъ уравненіе (87) выражаетъ слѣдующій законъ для всякой консервативной системы:

въ каждомъ положеніи системы сумма ея кинетической и потенціальной энергіи есть величина постоянная.

Эта сумма называется полной энергіей системы или кратко энергіей системы. Она сохраняетъ постоянную величину. При движеніи измѣняется только распредѣленіе энергіи между ея кинетической и потенціальной частями, между видимой и запасной энергіей. Запасъ энергіи то увеличивается на счетъ видимой энергіи, то уменьшается, когда видимая энергія растетъ.

Вотъ содержаніе Закона Сохраненія Энергіи, когда на него смотримъ исключительно съ точки зрѣнія Динамики.

252. Мы должны объясниться по поводу прибавленной нами величины С. Такъ какъ она произвольная, то и величина потенціальной энергіи произвольная; по нашему желанію мы можемъ дѣлать къ ней любую прибавку. Но эта прибавка должна быть одинакова для всѣхъ положеній системы. Потенціальная энергія есть запасъ энергіи; мы замѣчаемъ измѣненіе этого запаса, увеличеніе или уменьшеніе его, но намъ совершенно неизвѣстна полная величина запаса; вотъ почему величина С можетъ быть произвольною; она изображаетъ нашу догадку или произвольное предположеніе о величинѣ запаса.

Для примѣра разсмотримъ систему, въ которой дѣйствуетъ сила тяжести. Потенціальная энергія опредѣляется вѣсомъ и высотой центра тяжести; но отъ какого уровня нужно считать эту высоту? При рѣшеніи частныхъ вопросовъ мы можемъ измѣнять этотъ уровень. Нужно только выбрать его такъ, чтобы центръ тяжести никогда не опускался ниже избраннаго уровня;

тогда потенціальная энергія будетъ всегда положительная. Здѣсь мы поступаемъ подобно тому какъ при изученіи высоты воды въ рѣкѣ, или въ морѣ; основной уровень, отъ котораго отсчитываются высоты, нужно взять *ниже* наиболѣе низкаго возможнаго стоянія воды. Кромѣ этого условія мы не ставимъ другихъ ограниченій, а потому основной уровень, *нулевая точка*, до извѣстной степени произволенъ, можетъ быть измѣняемъ по нашему усмотрѣнію.

253. Вотъ, напр., какой можно сдѣлать выборъ величины потенціальной энергіи; между всѣми возможными положеніями системы выберемъ такое, для котораго получается самая большая живая сила, и примемъ, что для этого положенія потенціальная энергія равна нулю, т. е. израсходованъ весь запасъ ея. Называя эту живую силу

$$\max. Ж.С,$$

получимъ для всякаго другого положенія системы, изъ Закона Сохраненія Энергіи, слѣдующее соотношеніе:

$$Ж.С_A + П_A = \max.Ж.С,$$

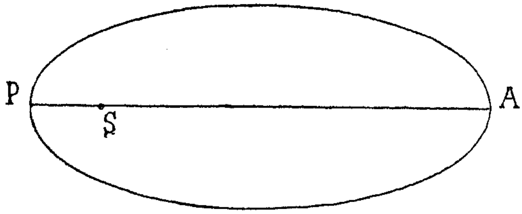
которое позволяетъ найти величину потенціальной энергіи для всякаго положенія системы.

Такъ, напр., разсматривая движеніе планеты около притягивающаго ее солнца, убѣждаемся, что наибольшая возможная живая сила получилась бы въ томъ случаѣ, когда планета упала бы на солнце. Отъ такого положенія системы можно отсчитывать ея потенціальную энергію.

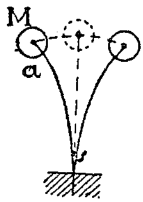
Но нѣтъ необходимости непремѣнно придерживаться этого правила для опредѣленія потенціальной энергіи; можно измѣнять его; вообще безусловная величина потенціальной энергіи не представляетъ интереса въ Динамикѣ. Важно знать не безусловныя величины, а разность потенціальныхъ энергій для двухъ различныхъ положеній.

253. ***Простые примѣры на Законъ Сохраненія Энергіи.*** а) При движеніи планеты вокругъ солнца потенціальная энергія есть результатъ силы притяженія; съ удаленіемъ планеты отъ солнца запасъ работы увеличивается, а когда планета приближается къ солнцу, то запасъ энергіи уменьшается. Поэтому живая сила, а слѣд. и скорость планеты, должна уменьшаться при удаленіи планеты отъ солнца и увеличиваться при сближеніи этихъ тѣлъ. Наибольшая скорость получается въ

перигелѣ P (фиг. 179), т. е. въ точкѣ, гдѣ планета всего ближе къ солнцу; въ афелѣ A, т. е. въ точкѣ наиболѣе удаленной отъ солнца, скорость планеты наименьшая.



Фиг. 179.



Фиг. 180.

b) На теорему Д. Бернулли можно смотрѣть, какъ на частный случай Закона Сохраненія Энергіи. Пьезометрическая высота есть мѣра запаса энергіи.

c) Тѣло M (фиг. 180) качается на пружинѣ. Здѣсь потенціальная энергія есть запасъ работы, заключающійся въ изогнутой пружинѣ. Онъ наибольшій для крайнихъ положеній тѣла M; тогда кинетическая энергія равна нулю. Въ среднемъ положеніи пружина вовсе не изогнута, и потенціальная энергія равна нулю; въ этомъ положеніи получается наибольшая скорость тѣла M.

254. *Условность различія между кинетической и потенціальной энергіями.* Пока мы остаемся на чисто динамической точкѣ зрѣнія и беремъ понятіе о силѣ въ общепринятомъ для него смыслѣ,—мы не встрѣтимъ затрудненій въ различеніи этихъ двухъ видовъ энергіи: энергіи движенія или кинетической, и энергіи положенія или потенціальной. Но когда переходимъ на почву гипотезъ и займемся физическими объясненіями происхожденія силъ, то указанное рѣзкое различіе двухъ видовъ энергіи уменьшается и даже можетъ совершенно уничтожиться. Сила можетъ оказаться простымъ результатомъ движенія, и энергія, которую мы считали потенціальной, можетъ оказаться энергіей движенія.

Примѣромъ намъ послужатъ явленія всемірнаго тяготѣнія.

Ньютонъ считалъ притяженіе небесныхъ тѣлъ нѣкоторой силой и не занимался гипотезами о происхожденіи этой силы, дѣйствующей на разстояніи. Съ этой точки зрѣнія энергія притяженія есть энергія потенціальная.

Но многихъ затрудняетъ допущеніе возможности дѣйствія между тѣлами, находящимися на разстояніи одно отъ другого; это представляется непонятнымъ и даже абсурдомъ. Считаютъ, что дѣйствіе одного тѣла на другое можетъ быть только при непосредственномъ прикосновеніи. Если это такъ, то для объясненія всемірнаго тяготѣнія нужно допустить существованіе особой среды, эфира, наполняющаго все междупланетное пространство и находящагося въ движеніи. Сила притяженія получится какъ результатъ ударовъ частицъ этой среды на планеты. Тогда энергія притяженія есть живая сила этихъ ударовъ; она оказывается кинетической энергіей. Этотъ взглядъ на происхожденіе силы притяженія былъ первый разъ высказанъ въ концѣ 18-го столѣтія Лесажемъ, геометромъ той школы, которая группировалась около знаменитой семьи математиковъ Бернулли. Послѣ того такое воззрѣніе на всемірное тяготѣніе неоднократно повторялось*). Подобные же взгляды высказывались и по поводу другихъ физическихъ явленій—электричества, магнитизма и т. д. Многіе современные физики совершенно отрицаютъ всякое „дѣйствіе на разстояніи" (actio in distans); по ихъ мнѣнію, всякое движеніе можетъ быть получено только отъ непосредственнаго прикосновенія съ другимъ движущимся тѣломъ. А тогда всякая энергія будетъ непремѣнно кинетическая, и особаго рода ея—энергіи положенія, потенціальной энергіи—вовсе не существуетъ. Для того, чтобы послѣдовательно провести этотъ взглядъ, необходимо допускать существованіе невидимыхъ тѣлъ, невидимой среды, невидимыхъ движеній.

255. ***Разсѣяніе энергіи.*** Можно указать на многія явленія, въ которыхъ какъ будто бы не получается подтвержденіе Начала Сохраненія Энергіи, а напротивъ того ясно видна потеря энергіи, разсѣяніе ея. Не трудно придумать опыты, наглядно указывающіе на такое кажущееся разсѣяніе энергіи. Самое простое явленіе этого рода есть треніе. Сдѣлаемъ такой опытъ: на столикѣ поставлены тяжело нагруженныя салазки; усиліемъ нашей руки мы передвигаемъ эти салазки отъ лѣваго края столика къ правому и затѣмъ обратно возвращаемъ ихъ на лѣвый край. При этомъ опытѣ нами истрачена значительная работа. Во что она превратилась? Какая энергія получилась изъ этой работы? Мы не замѣчаемъ появленія скорости, слѣд. нѣтъ кинетической энергіи. Затѣмъ части нашей системы, со-

*) Недавно опять вспомнили о гипотезѣ Лесажа; поводомъ послужило открытіе радіоактивныхъ явленій. Пробуютъ разбирать вопросъ—не играютъ ли эти явленія роль въ произведеніи силы тяготѣнія. См. J. J. Thomson. Electricity and Matter.

стоящей изъ столика и санокъ, подъ конецъ опыта пришли въ то же взаимное расположеніе, въ которомъ онѣ находились въ началѣ; слѣд. работа внутреннихъ силъ равна нулю, и потенціальная энергія не измѣнилась. Итакъ работа нашихъ рукъ истратилась, а взамѣнъ ея мы не замѣчаемъ ни появленія эквивалентнаго количества кинетической энергіи, ни полученія потенціальной энергіи; работа нашихъ рукъ разсѣялась, исчезла безъ остатка и безъ слѣда.

257. Самое простое истолкованіе этого противурѣчія заключается во введеніи силы тренія. Между салазками и столикомъ дѣйствуетъ сила тренія, которая всегда противуположна движенію, а потому даетъ отрицательную работу; эта отрицательная работа и поглотила движущую работу, произведенную нашими руками.

Существенный недостатокъ этого объясненія состоитъ въ томъ, что мы вводимъ силу тренія, которая противурѣчитъ молекулярной гипотезѣ. Треніе происходитъ отъ взаимнаго дѣйствія частицъ столика и салазокъ. А на основаніи молекулярной гипотезы работа такихъ взаимодѣйствій будетъ нуль во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда окончательное положеніе системы одинаково съ начальнымъ. Проводя вполнѣ послѣдовательно молекулярную гипотезу, мы не можемъ допустить существованія такихъ дѣйствій между частицами, которыя имѣютъ характеръ тренія, т. е. даютъ всегда отрицательную работу, какъ при прямомъ пути, такъ и при обратномъ. Поэтому, для объясненія того разсѣянія энергіи, которое происходитъ при такъ называемомъ треніи, слѣдуетъ или отказаться отъ молекулярной гипотезы, или показать, что энергія не исчезла, а имѣется на лицо въ какой нибудь формѣ.

257. Всѣмъ извѣстно, что общепринято именно второе изъ этихъ толкованій; сохраняютъ молекулярную гипотезу и указываютъ, что исчезнувшая повидимому энергія имѣется налицо въ формѣ того невидимаго движенія, которое называется теплотою. При треніи получается нагрѣваніе трущихся тѣлъ. Слѣдовательно разсѣяніе энергіи было только кажущееся, и явленія тренія не противурѣчатъ Закону Сохраненія Энергіи.

Кажущееся разсѣяніе энергіи вслѣдствіе тренія и появленіе взамѣнъ того теплоты часто происходятъ въ грандіозныхъ размѣрахъ. Вода нашихъ рѣкъ, при теченіи ихъ отъ истока къ устью, опускается со значительной высоты, а ея скорость и кинетическая энергія при этомъ не только не увеличиваются, а даже обыкновенно уменьшаются. Огромное количество энергіи, измѣряемое произведеніемъ вѣса текущей воды на высоту ея паденія, истрачивается на треніе—(треніе воды о русло, треніе струй воды между собою при водоворотахъ, вихряхъ, ударахъ воды) и преобразовывается въ тепло.

На фабрикахъ и заводахъ значительная часть энергіи, которую доставляетъ двигатель (паровой или водяной), тратится на треніе. Очень поучительно подумать о такой тратѣ и посчитать ее. Напримѣръ, крупная бумагопрядильня требуетъ для своего движенія паровую машину силою въ тысячу и болѣе лошадей. Слѣдовательно она расходуетъ громадное количество энергіи. Но во что превращается эта энергія? Что мы получаемъ взамѣнъ? Результатъ работы бумагопрядильни заключается въ томъ, что хлопчатая бумага, вата, превращается въ пряжу, въ нитки. То есть получается новое расположеніе частицъ хлопка однѣхъ относительно другихъ- Этому новому расположенію отвѣчаетъ увеличеніе потенціальной энергіи, но оно такъ незначительно, по сравненію съ истраченной энергіей, что эту потенціальную энергію почти не стоитъ принимать въ расчетъ. Почти вся работа громаднаго пароваго двигателя прядильни тратится на треніе приводовъ и машинъ, т. е. преобразовывается въ теплоту. Количество выдѣляющейся при этомъ теплоты на столько велико, что бумагопрядильню не нужно отапливать, даже при такихъ сильныхъ морозахъ, которые бываютъ въ Петербургѣ и Москвѣ. А лѣтомъ теплота, выдѣляющаяся отъ тренія, производитъ въ бумагопрядильнѣ трудно выносимую духоту, противъ которой борятся усиленной вентиляціей, но безуспѣшно.

258. ***Разборъ молекулярной гипотезы.*** Гипотеза эта имѣетъ очень важное значеніе въ наукѣ. Устанавливая общее происхожденіе и общія свойства всѣхъ силъ въ природѣ, она долгое время служила основаніемъ классической раціональной механики. Поэтому умѣстно внимательнѣе пересмотрѣть содержаніе гипотезы и изучить всѣ ея стороны.

Въ окончательномъ своемъ видѣ эта гипотеза допускаетъ слѣдующія положенія:

1. Всѣ тѣла природы состоятъ изъ матеріальныхъ точекъ, между которыми существуютъ силы взаимодѣйствія, направленныя по прямымъ, соединяющимъ эти точки.

Итакъ въ составъ гипотезы входятъ допущеніе атомовъ-точекъ, и силъ, дѣйствующихъ по прямымъ, соединяющимъ эти точки. Это простѣйшая гипотеза, но не единственная возможная; можно сдѣлать другія предположенія:—можно считать частицы тѣлъ имѣющими сложное строеніе,—допускать, что дѣйствіе одной частицы на другую выражается не только силой, но и парой, или предполагать, что частицы тѣлъ имѣютъ нѣкоторую полярность, т. е. допускать различіе свойствъ у разныхъ сторонъ частицы и т. д. Къ такимъ усложняющимъ гипотезамъ неоднократно прибѣгали для объясненія тѣхъ явленій, для которыхъ простѣйшая молекулярная гипотеза оказывается недостаточной. Въ Теоріи Упругости сюда относятся работы Фойгта.

2. Молекулярная гипотеза допускаетъ, что сила взаимодѣйствія между частицами зависитъ исключительно отъ ихъ разстоянія и ни отъ чего больше.

Слѣд. прежде всего допускаютъ, что эта сила не зависитъ отъ направленія въ пространствѣ той прямой линіи, которая соединяетъ частицы.

Затѣмъ допускаютъ, что всякій разъ, какъ разстояніе частицъ повторяетъ свою прежнюю величину, непремѣнно и сила взаимодѣйствія тоже повторяетъ свою прежнюю величину. Т. е. принимаютъ, что величина этой силы для извѣстнаго мгновенія зависитъ только отъ расположенія частицъ, имѣющагося въ это мгновеніе, и нисколько не зависитъ отъ предшествовавшихъ явленій. Другими словами, въ области молекулярныхъ силъ принимаютъ, что настоящее нисколько не зависитъ отъ прошедшаго; что предъидущее движеніе частицы, или предъидущая ея исторія не оказываетъ вліянія на молекулярныя силы. Иногда это заключеніе выражаютъ словами: отсутствіе наслѣдственности (non-hérédité) у матеріальныхъ частицъ *). Это общепринятый взглядъ Раціональной Механики; всегда считаютъ, что величина и направленіе ускоренія какого нибудь тѣла, имѣющіяся для даннаго мгновенія, вполнѣ опредѣляются положеніемъ этого тѣла относительно другихъ тѣлъ, существующимъ въ это самое мгновеніе, и не зависятъ ни отъ прошедшихъ явленій, ни отъ будущихъ.

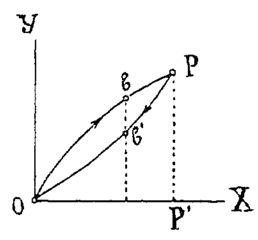
259. Въ такомъ видѣ молекулярная схема представляетъ простѣйшую гипотезу, съ которой согласуется значительное число наблюденій, помощію которой можно объяснить много явленій. Но съ расширеніемъ круга наблюденій, съ увеличеніемъ степени точности ихъ, начинаютъ открываться факты, не согласующіеся съ этой гипотезой, противурѣчащіе ей. Да и трудно

---

*) См. E. Picard. La science moderne (одинъ изъ томиковъ серіи: Bibliotéque de Philosophie scientifique).

ожидать, чтобы явленія природы могли вполнѣ согласоваться съ придуманной нами схемой. Достаточно, если такое согласіе происходитъ лишь въ общихъ чертахъ.

260. *Гистерезисъ.* Мы имѣемъ много фактовъ, противурѣчащихъ тому допущенію, которое назвали „отсутствіемъ наслѣдственности"; на нихъ постоянно наталкиваются въ лабораторіяхъ, изучая явленія, при которыхъ измѣняется форма твердыхъ тѣлъ, т. е. явленія растяженія, сжатія, изгиба, крученія и т. д. Положимъ, мы растягиваемъ нѣкоторый брусокъ постепенно увеличивающимися усиліями; эти силы измѣряютъ внутреннее притяженіе частицъ бруска. При этомъ мы измѣряемъ удлиненіе бруска, которое указываетъ на измѣненіе разстоянія между частицами его. Такой опытъ даетъ намъ указанія на величины молекулярныхъ силъ. Результаты его изобразимъ графически, откладывая по абсциссамъ удлиненія (δ), а по ординатамъ растягивающія силы (p). Пусть при растяженіи зависимость этихъ величинъ представляется кривой ОbР (фиг. 181). Дойдя до удлиненія OP′, измѣнимъ направленіе опыта; будемъ постепенно уменьшать растягивающія силы и вернемся къ нулю, т. е. отсутствію силъ. Удлиненія также будутъ уменьшаться, и мы можемъ для такого обратнаго явленія опять построить кривую, изображающую зависимость P и δ. Если молекулярная гипотеза справедлива, то одинаковымъ величинамъ δ при прямомъ и обратномъ явленіи, при увеличеніи удлиненія и при уменьшеніи его, должны отвѣчать одинаковыя силы P; другими словами, кривая, показывающая зависимость P отъ δ, при обратномъ явленіи должна совпадать съ кривой ОbР прямого явленія. Что же показываетъ опытъ? Оказывается, что приблизительно такое совпаденіе происходитъ, но при точныхъ наблюденіяхъ открывается несомнѣнная разница кривой обратнаго явленія Рb'О отъ кривой прямаго явленія ОbР; это различіе прямого и обратнаго явленій называется гистерезисомъ.



Фиг. 181.

Слѣдствіемъ гистерезиса получается потеря энергіи. При растяженіи молекулярныя силы производятъ отрицательную работу, сопротивляются растяженію, и величина этой работы измѣряется площадью ОbРР′О. При возстановленіи формы молекулярныя силы даютъ положительную работу, величина которой измѣряется площадью Оb'РР′О; она меньше, чѣмъ площадь

ObPP'O. Разность этихъ двухъ площадей представляетъ исчезнувшую работу, т. е. разсѣянную энергію. А между тѣмъ наше тѣло вернулось къ первоначальной своей формѣ, всѣ разстоянія частицъ его получились прежнія, слѣд. на основаніи молекулярной гипотезы работа внутреннихъ силъ должна была бы быть нулемъ! Конечно потеря работы отъ гистерезиса при тѣхъ величинахъ силъ, которыя дѣйствуютъ въ нашихъ машинахъ, крайне мала; мы смѣло можемъ пренебрегать ею при всѣхъ нашихъ приложеніяхъ. Но тѣмъ не менѣе явленія гистерезиса существуютъ и свидѣтельствуютъ противъ молекулярной гипотезы*).

261. Такое же свидѣтельство доставляютъ и явленія упругаго послѣдѣйствія. Пусть твердое тѣло получило измѣненіе формы, растяженіе, крученіе и т. д., и затѣмъ дѣйствіе силы прекратилось. Часто тѣло продолжаетъ измѣнять свою форму долгое время послѣ прекращенія силы; иногда это продолжается мѣсяцы и годы. Это явленіе часто сравнивали съ памятью; твердое тѣло какъ будто помнитъ о бывшемъ дѣйствіи силы; если на него послѣдовательно дѣйствовали нѣсколько силъ, иногда въ различныхъ направленіяхъ, то долго послѣ прекращенія ихъ дѣйствія замѣчаются явленія, указывающія, что тѣло какъ бы вспоминаетъ каждую изъ этихъ силъ отдѣльно. Эти явленія показываютъ, что если тѣло было растянуто, то молекулярныя силы его, при томъ же разстояніи частицъ, отличаются отъ силъ, имѣющихся въ тѣлѣ, которое не было растянуто. Т. е. молекулярныя силы зависятъ не только отъ настоящаго расположенія частицъ, но и отъ ихъ давнишняго прошлаго, отъ ихъ исторіи.

262. Наконецъ укажемъ еще на обширный разрядъ фактовъ, какъ бы противурѣчащихъ молекулярной гипотезѣ. Мы часто встрѣчаемся съ такъ называемыми вредными сопротивленіями — сопротивленіемъ воды и другихъ жидкостей, сопротивленіемъ воздуха. Экспериментальное изученіе этихъ явленій всегда указываетъ, что силы сопротивленія зависятъ отъ скорости, — пропорціональны первой степени этой скорости, или квадрату скорости; иногда получаются и болѣе сложныя зависимости отъ скорости. Итакъ оказывается, что сила, напр. дѣйствіе частицъ воды на движущееся въ ней судно,—зависитъ не только отъ взаимнаго расположенія частицъ—но и отъ ихъ скорости. Слѣд. силы будутъ разныя,

*) О гистерезисѣ при деформаціи см. H. Bouasse. Notions fondamentales relatives aux déformations. (Изъ серіи Bibliotéque de l'eleve ingenieur).

если скорости неодинаковы, хотя расположеніе частицъ одно и то же. А это не вяжется съ молекулярной гипотезой.

263. Такимъ образомъ мы встрѣчаемъ довольно значительное число явленій, противурѣчащихъ этой гипотезѣ. Конечно возможно, помощію различныхъ новыхъ допущеній и предположеній, истолковать многія эти явленія такимъ образомъ, что противурѣчіе съ молекулярной гипотезой будетъ только кажущимся и такимъ образомъ гипотеза будетъ до извѣстной степени спасена. Главная сущность такихъ объясненій приводится къ слѣдующему: наши наблюденія вѣроятно не полны, и мы не замѣчаемъ нѣкоторыхъ скрытыхъ явленій, происходящихъ среди мельчайшихъ частицъ тѣла; напр., можетъ быть энергія, исчезнувшая при гистерезисѣ, преобразовывается въ теплоту; явленія упругаго послѣдствія вѣроятно вызываются существеннымъ измѣненіемъ внутренняго расположенія частицъ тѣла, которое мы не видимъ; сопротивленіе воздуха и воды есть результатъ очень разнообразныхъ перемѣщеній частицъ этихъ жидкостей, вихрей въ нихъ, а мы вовсе не разсматриваемъ эти перемѣщенія, замѣняя весь комплексъ молекулярныхъ силъ одной силой сопротивленія; это кажущаяся, фиктивная, придуманная нами сила; можетъ быть, истинныя, молекулярныя силы въ этомъ явленіи согласуются съ молекулярной гипотезой.

Во всякомъ случаѣ число явленій, противурѣчащихъ этой гипотезѣ все увеличивается, и нельзя надѣяться на возможность сохраненія ея. По крайней мѣрѣ потребуются значительныя дополненія и усложненія ея. Эта схема сослужила свою службу, и для дальнѣйшихъ успѣховъ науки можетъ потребоваться другая гипотеза.

264. Однако изъ этого не слѣдуетъ заключать, что при такомъ измѣненіи гипотезы будетъ затронутъ Законъ Сохраненія Энергіи. Онъ покоится на многочисленныхъ экспериментальныхъ наблюденіяхъ, которыя вселили въ насъ твердое убѣжденіе въ томъ, что всѣ силы въ природѣ имѣютъ консервативный характеръ. Всѣ новыя наблюденія и опыты постоянно подтверждаютъ это. Молекулярная гипотеза имѣла очень важное значеніе при вырабатываніи этого убѣжденія, а теперь въ ней нѣтъ особой нужды, и она можетъ быть даже вовсе отброшена, снята, какъ снимаютъ лѣса, по окончаніи постройки; для готоваго зданія они не нужны, хотя безъ нихъ невозможно было возведеніе его.

ПЯТНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

Perpetuum mobile.

.... toutes les époques ont connu les chercheurs de mouvement perpetuel, qui n'etaient point tous les fous. (Duhem).

Съ Закономъ Живыхъ Силъ и Началомъ Сохраненія Энергіи тѣсно связанъ вопросъ о Perpetuum Mobile, т. е. объ устройствѣ такой машины, которая, будучи разъ приведена въ движеніе, затѣмъ будетъ непрерывно двигаться сама и никогда не остановится. Мало того, желаютъ еще чтобы машина при своемъ движеніи постоянно производила нѣкоторую полезную работу—молола зерно, или поднимала воду и т. д., не требуя для преодолѣнія такихъ сопротивленій никакой посторонней движущей силы, не вызывая ни расхода топлива, ни дѣйствія вѣтра или текущей воды, а черпая энергію изъ самой себя, изъ взаимнаго дѣйствія своихъ частей. Это машина, которая должна давать работу даромъ, безъ всякаго расхода.

Исторія исканій Perpetuum Mobile въ высшей степени интересна для механики, потому что она тѣсно переплетена съ исторіей установленія основныхъ законовъ Динамики. Но въ ней заключается еще особый общій интересъ, такъ какъ мы имѣемъ въ ней поучительный образецъ человѣческихъ исканій, стремленій, и въ особенности заблужденій, черезъ которыя приходится проходить человѣчеству по пути къ истинѣ.

Мы не находимъ въ классической древности попытокъ придумать машину, которая давала-бы даровую работу, да и трудно ожидать чтобы въ то время стали заниматься такимъ вопросомъ. У грековъ и римлянъ промышленность была слабо развита, а многочисленный классъ рабовъ давалъ работу почти даровую, такъ что не было цѣли искать еще новый источникъ дешевой энергіи. Нужно полагать, что прежде всего начали думать о вѣчномъ движеніи философы и ученые, и только впослѣдствіи появились изобрѣтатели, имѣвшіе въ виду практическія цѣли.

Одно изъ раннихъ упоминаній о perpetuum mobile относится къ половинѣ 13-го столѣтія, а именно къ 1269 году. Это годъ, когда была написана знаменитая въ свое время рукопись Пьера-де-Марикуръ о магнитахъ. Въ ней авторъ, изложивъ законы магнитныхъ явленій, пытается помощію магнитовъ получить perpetuum mobile *).

Уже Леонардо да Винчи (1451—1519) доказываетъ невозможность вѣчнаго движенія. За Леонардо повторяетъ тоже доказательство Карданъ (1501—1576); онъ указываетъ, что нельзя устроить часы, которыя заводятся сами собою, и сами поднимаютъ вверхъ гири, движущія механизмъ **). А въ концѣ 16-го столѣтія нѣкій Эдмундъ Джентиллъ утверждаетъ, что онъ изобрѣлъ Perpetuum Mobile, имѣющій силу достаточную чтобы двигать мельницу ***). Слѣдующія затѣмъ два столѣтія 17-е и 18-е очень богаты изобрѣтеніями, претендующими быть perpetuum mobile. И въ 19-мъ столѣтіи число предложеній этого рода не уменьшается.

Изобрѣтенія эти рѣдко приводились въ исполненіе; чаще всего все кончалось на бумагѣ; составлялся рисунокъ машины, описаніе ея, а во множествѣ случаевъ нѣтъ даже и этого, и все ограничивается торжественнымъ увѣреніемъ, что великая задача рѣшена и вѣчное движеніе найдено. Обыкновенно изобрѣтатели не могли достать достаточное количество денегъ для приготовленія своей машины.

Но было нѣсколько случаевъ исполненія проектовъ perpetuum mobile въ большихъ размѣрахъ, и сохранились отзывы современниковъ, видѣвшихъ эти машины. Самый замѣтный случай этого рода, получившій широкую извѣстность—представляетъ колесо, изобрѣтенное Орфиреусомъ въ 1712 году, и представленное имъ Ландграфу Гессенъ-Кассельскому въ 1717 году.

---

*) Впослѣдствіи эта рукопись была напечатана, и есть новѣйшія перепечатки ея. См. Duhem. Les origines de la Statique Tome I. p. 57.

**) См. въ той же книгѣ Duhem. Chap. IV.

***) Въ книгѣ Henry Dircks. Perpetuum Mobile or Search for self—motive Power 1861 содержится масса данныхъ по исторіи этого вопроса, собраніе патентовъ, описаніе машинъ, отзывы современниковъ, мнѣнія ученыхъ. Все собрано съ большимъ трудолюбіемъ, и возможной полнотой, и представляетъ очень цѣнный матеріалъ, хотя совершенно сырой, не приведенный въ систему и необработанный. Авторъ даже не рѣшилъ самъ для себя вопросъ о возможности или неисполнимости задачи, составляющей предметъ его книги. Онъ стоитъ на распутьи, прислушиваясь къ мнѣніямъ лицъ, считающихъ perpetuum mobile за химеру, но симпатіи его и надежды очевидно на сторонѣ противуположнаго мнѣнія.

Огромное колесо, которое Орфиреусъ изготовилъ для ландграфа (12 футовъ діам. могло поднимать грузъ въ 70 фунт. на значительную высоту) было помѣщено въ особой комнатѣ; входъ въ нее былъ запертъ и запечатанъ печатью ландграфа. Черезъ два мѣсяца открыли это помѣщеніе и оказалось, что колесо по прежнему вертѣлось.

Извѣстіе объ этомъ фактѣ быстро распространилось по всей Европѣ и вызвало сенсацію какъ въ средѣ правителей того времени, такъ и посреди ученыхъ. Появившееся въ нѣмецкихъ газетахъ печатное сообщеніе объ изобрѣтеніи Орфиреуса попалось на глаза Петру Великому, который сильно заинтересовался имъ; это сообщеніе послужило для Петра первымъ поводомъ къ начатію переговоровъ со знаменитымъ нѣмецкимъ философомъ Вольфомъ объ основаніи Академіи Наукъ. „Петръ приглашалъ Вольфа пріѣхать, на какихъ угодно условіяхъ, въ Петербургъ, только бы онъ согласился усовершенствовать изобрѣтеніе Орфиреуса“ *). Изъ числа тогдашнихъ ученыхъ особенное вниманіе на этотъ приборъ обратилъ извѣстный физикъ Лейденскій профессоръ Гравезандъ **) ('S. Gravesande). До насъ дошло письмо Гравезанда къ Ньютону, въ которомъ голландскій ученый сообщаетъ результаты своего осмотра колеса Орфиреуса. Оказывается, что Гравезандъ считалъ задачу о построеніи perpetuum mobile возможной; внутреннее устройство колеса Орфиреуса онъ не могъ осмотрѣть, такъ какъ оно было тщательно закрыто, но тѣмъ не менѣе Гравезандъ даетъ довольно благопріятный отзывъ, и склоненъ думать, что Орфиреусу удалось построить машину, имѣющую вѣчное движеніе.

Конецъ всего этого дѣла, вызвавшаго такія неумѣренныя надежды, былъ очень печаленъ для Орфиреуса. Обидѣвшись на то, что ландграфъ не далъ ему обѣщанной крупной денежной награды (около 200.000 рублей) и что, не соблюдая обѣщаннаго секрета, показали его изобрѣтеніе „ученому“ Гравезанду, Орфиреусъ разломалъ свое колесо „на атомы“, какъ выражается одинъ писатель. Такой конецъ долженъ убѣдить насъ въ томъ, что Орфиреусъ былъ обманщикъ, испугавшійся, что, при изслѣдованіи учеными, его обманъ сейчасъ будетъ обнаруженъ.

---

*) Н. Милюковъ. Очерки по исторіи русской культуры. II. 288.

**) Приборъ его, служащій для демонстраціи явленій удара упругихъ шаровъ, до сихъ поръ фигурируетъ въ каждомъ физическомъ кабинетѣ. Извѣстенъ также, и до сихъ поръ не потерялъ значенія, способъ Гравезанда опредѣлять величины коеффиціентовъ упругости.

Еще раньше Орфиреуса (около 1649 года) знаменитый маркизъ Урстеръ (Worcester), одинъ изъ первыхъ изобрѣтателей паровой машины, человѣкъ съ богатой фантазіей и необыкновенной изобрѣтательностью, также вообразилъ, что онъ изобрѣлъ perpetuum mobile. Въ сочиненіи Урстера „Сотня Изобрѣтеній“ *) perpetuum mobile находится подъ n° 56-ымъ.

Подробнаго описанія нѣтъ; говорится, что машина состояла изъ колеса діаметромъ въ 14 футъ, вращавшагося на горизонтальной оси, и содержавшаго внутри себя 40 грузовъ по 50 фунтовъ каждый; вслѣдствіе нѣкотораго неизвѣстнаго устройства, «эти грузы, съ одной стороны колеса (напр. съ правой) всегда оказывались на футъ дальше отъ центра колеса, чѣмъ при нахожденіи ихъ на другой сторонѣ колеса (лѣвой); „не угодно ли Вамъ обсудить послѣдствія этого“ говоритъ маркизъ въ заключеніе своего описанія.

Эта идея Урстера—построить колесо, которое всегда будетъ имѣть перевѣсъ съ одной стороны и потому всегда должно вращаться въ извѣстномъ направленіи—занимала очень многихъ и породила массу конструкцій и предложеній. Всѣ эти приборы должны, по мнѣнію изобрѣтателей, двигаться вслѣдствіе своей собственной тяжести.

Неуспѣхъ простыхъ конструкцій вызывалъ различныя усложненія; вводили въ составъ приборовъ воду—напр. насосъ качаетъ ее вверхъ на водяное колесо, а это послѣднее, вращаясь, должно приводить въ движеніе тотъ самый насосъ, который качаетъ на него воду и т. д. Отчаявшись въ дѣйствіи вѣса, принимались за другія силы: пробовали пользоваться капиллярными силами, явленіями эндосмоза, магнетизмомъ и т. д.

Въ XVIII-мъ столѣтіи изобрѣтатели много занимались устройствомъ автоматовъ, подражавшихъ движеніямъ человѣка и животныхъ. Тогда были изготовлены знаменитые автоматы: утка Вокансона, флейтисты Вокансона и Дроза, тамбуринистъ Вокансона, игрокъ въ шахматы Кемпелея и др. **). Теперь мы смотримъ на подобные приборы какъ на игрушки, но тогда изобрѣтатели, занимавшіеся изготовленіемъ автоматовъ, преслѣдовали серьезную цѣль; это была все таже идея получить даровую

*) A Century ot the Names and Scantlings of Inventions by me already, practised. Это перечисленіе или каталогъ изобрѣтеній, сдѣланныхъ маркизомъ; оно перепечатано въ приложеніи къ біографіи Урстера, написанной Дёрксомъ.

**) См. Лексиконъ чистой и прикладной математики Буняковскаго статья Automate.

движущую силу. Надѣялись построить автоматъ, который будетъ производить постоянную работу, совершенно какъ живое существо. Тогда еще не былъ выясненъ источникъ энергіи живыхъ существъ, на нихъ смотрѣли какъ на нѣкоторый хитрый механизмъ и думали, что стоитъ только устроить машину, подражающую движеніямъ человѣка, и мы получимъ работника.

Первыя попытки устроить perpetuum mobile относятся къ тому времени когда Динамика еще не существовала и законы движенія тѣлъ не были извѣстны. Развитіе этой науки, выясненіе явленій движенія и работы, нисколько не повліяли на изобрѣтателей вѣчнаго движенія; эти фантазёры совершенно игнорировали науку, и остались вовсе не затронутыми ею. Идея вѣчнаго движенія владѣла ихъ умами какъ нѣчто неоспоримое; ни малѣйшаго сомнѣнія въ возможности осуществленія ея у нихъ не появляется, никогда даже не подвергается разбору вопросъ объ исполнимости задачи—получить даровую работу изъ механизма. Всѣ, иногда недюжинныя, силы ума и фантазіи обращаются на придумываніе подробностей.

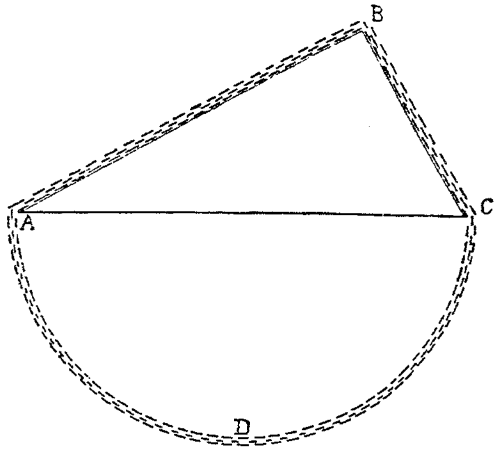
Эта твердая, ни на чемъ не основанная, вѣра въ возможность полученія дарового источника энергіи поразительна въ особенности потому, что у людей науки, мы наоборотъ постоянно встрѣчаемъ противуположное убѣжденіе о невозможности perpetuum mobile. Ученые, способствовавшіе развитію механики, обыкновенно принимали эту невозможность какъ инстинктивный постулатъ, какъ нѣчто не требующее доказательствъ. Свои выводы и доказательства законовъ механики, ученые 16-го, 17-го и 18-го столѣтій часто основываютъ на этомъ постулатѣ: у нихъ приведеніе къ perpetuum mobile играетъ ту-же роль какъ reductio ad absurdum въ чистой математикѣ. Такъ было даже раньше установленія основныхъ законовъ Динамики, до зарожденія первыхъ начатковъ этой науки. Мы уже приводили мнѣнія по этому вопросу Леонардо да Винчи и Кардана.

Въ самой первой своей работѣ Галилей приводитъ невозможность вѣчнаго движенія какъ аксіому; онъ пользуется ею, чтобы доказать, что твердое тѣло, имѣющее такую же плотность какъ жидкость, въ которую оно погружено, будетъ находиться въ равновѣсіи *).

Къ этому же разряду соображеній относится выводъ условій равновѣсія на наклонной плоскости, сдѣланный Стевиномъ (1548—1620) и послужившій основаніемъ для установленія

*) Duhem. Les origines de la Statique I. p. 241.

закона параллелограмма силъ. Стевинъ ведетъ свои разсужденія вообразивши слѣдующій механизмъ: на двускатную наклонную плоскость ABC (фиг. 182) положена безконечная цѣпь; она по необходимости должна находиться въ равновѣсіи. Дѣйствительно: допустимъ обратное, и предположимъ что цѣпь начнетъ двигаться въ извѣстномъ направленіи, скользя по плоскости; при этомъ скольженіи расположеніе тяжести цѣпи относительно наклонной плоскости не измѣняется, слѣд. остаются всѣ прежнія условія дѣйствія силъ. Условія тѣже, что были въ началѣ, слѣд. если въ началѣ получалось скольженіе, то оно должно продолжаться и далѣе, въ томъ же направленіи. И такъ получается perpetuum mobile, а это невозможно, слѣд. наше допущеніе объ отсутствіи равновѣсія невѣрно. Доказавши равновѣсіе цѣпи ABCD, Стевинъ находитъ, что равновѣсіе не нарушится, если будетъ отброшена часть цѣпи ADC. А тогда имѣемъ равновѣсіе двухъ кусковъ цѣпи AB и BC, вѣса которыхъ пропорціональны длинамъ скатовъ AB и BC; вотъ и получили законъ равновѣсія грузовъ на наклонной плоскости.



Фиг. 182.

Есть свѣдѣнія, что Кеплеръ также высказался противъ возможности perpetuum mobile *).

Декартъ въ одномъ изъ своихъ писемъ къ Мерсенну говоритъ: „мнѣ пришлось видѣть много квадратуръ круга, вѣчныхъ движеній и разныхъ другихъ мнимыхъ доказательствъ, которыя оказывались ложными" **).

Затѣмъ перейдемъ къ Гюйгенсу, которому Динамика обязана первыми своими успѣхами, послѣ установленія Галилеемъ законовъ движенія матеріальной точки подъ дѣйствіемъ постоянной силы. Гюйгенсъ первый разсматриваетъ движеніе системы;

*) Въ указанной книгѣ Dirks'a есть ссылка на письмо Кеплера по этому поводу, относящееся къ 1607 г.

**) См. Duhem. Les origines de la Statique. Tome II p. 58.

онъ первый вводитъ перемѣнныя силы, ему принадлежитъ идея о центробѣжной силѣ.

Одинъ изъ самыхъ важныхъ выводовъ Гюйгенса есть разборъ движенія сложнаго маятника; онъ открылъ существованіе центра качанія. При этомъ выводѣ Гюйгенсъ основывается на невозможности perpetuum mobile *).

Лейбницъ пользовался тѣмъ же постулатомъ въ знаменитомъ спорѣ о томъ какъ должно измѣрять силу движущагося тѣла, т. е. давленіе, которое такое тѣло произведетъ на встрѣтившееся ему препятствіе **). Нѣкоторые ученые утверждали, что за мѣру такой силы нужно принимать произведеніе массы движущагося тѣла на его скорость. Лейбницъ же настаивалъ, что такая мѣра опредѣляется произведеніемъ массы на квадратъ скорости. Въ письмѣ къ Денису Папину Лейбницъ, поддерживая свое мнѣніе, указываетъ, что принятіе другаго мнѣнія ведетъ къ допущенію возможности perpetuum mobile, т. е. онъ пользуется этимъ соображеніемъ какъ доводомъ къ нелѣпости.

Появленіе въ XVII-мъ столѣтіи массы заявленій о будто бы найденномъ рѣшеніи задачи о вѣчномъ движеніи вызвало потребность въ ясномъ и простомъ доказательствѣ того, что устройство машины, служащей непрерывнымъ источникомъ работы, противурѣчитъ основнымъ законамъ механики. Одно изъ первыхъ доказательствъ этого рода принадлежитъ знаменитому математику Лагиру, и было сообщено Парижской Академіи Наукъ въ 1678 г. Такъ какъ несмотря на это изобрѣтатели постоянно обращались въ Академію съ заявленіями о томъ, что ими найдено perpetuum mobile, и съ просьбами о разсмотрѣніи такихъ изобрѣтеній, то въ 1755 г. Академія постановила оставлять безъ отвѣта всѣ заявленія и предложенія, касающіяся perpetuum mobile. Однако эта мѣра не достигла своей цѣли и не остановила потокъ фантастическихъ предложеній. И теперь еще каждому профессору механики безпрестанно приходится имѣть дѣло съ изобрѣтателями подобныхъ химеръ. По своему личному опыту я долженъ сказать, что это почти всегда лица очень почтенные, добросовѣстно преданные идеѣ, но увлеченные ею такъ сильно, что они абсолютно глухи къ доводамъ разсудка. На нихъ не дѣйствуютъ не только словесныя, логическія доказательства,

*) См, Lagrange. Mécanique analytique ed. 1853. p. 218.

**) Такое давленіе движущагося тѣла Лейбницъ называлъ живой силой (Vis Viva) въ противуположность мертвой силѣ (Vis Mortua) т. е. давленію производимому неподвижнымъ тѣломъ. Отсюда произошелъ современный терминъ живая сила.

но даже такое сильное фактическое доказательство, которое имъ представляютъ своей полной инертностью продукты ихъ изобрѣтательности, изготовленные ихъ собственными руками. Мнѣ приходилось видѣть изобрѣтателей только что окончившихъ, послѣ долгихъ трудовъ, свой perpetuum mobile. Абсолютная неподвижность этого прибора нисколько не смущаетъ изобрѣтателя, который обыкновенно объясняетъ ее самымъ маловажнымъ обстоятельствомъ; или размѣры прибора недостаточны,или одинъ изъ зубцовъ многочисленныхъ зубчатыхъ колесъ механизма невполнѣ вѣренъ. Какъ только изобрѣтатель получитъ возможность, онъ немедленно приступитъ къ повторенію своего механизма, въ большемъ масштабѣ, или съ болѣе точными зубьями, и вполнѣ увѣренъ въ будущемъ успѣхѣ. Здѣсь мы уже имѣемъ дѣло съ матеріаломъ интереснымъ не для механики, а для психологии.

Съ точки зрѣнія Динамики вопросъ о perpetuum mobile крайне простъ и вполнѣ разрѣшается Закономъ Сохраненія Энергіи. При этомъ вовсе не нужно разсматривать отдѣльно различныя предложенныя конструкціи, а можно сдѣлать сразу общее заключеніе для всѣхъ.

Какой бы мы ни устроили механизмъ, но если въ немъ изъ внѣшнихъ силъ дѣйствуетъ только сила тяжести его частей, то навѣрное работа, произведенная тяжестью за извѣстное время, измѣряется произведеніемъ вѣса машины на пониженіе ея центра тяжести происшедшее въ это время. Такимъ образомъ запасъ работы, доставляемый силой тяжести, опредѣляется возможнымъ наибольшимъ пониженіемъ центра тяжести машины. Прибавивъ сюда начальную живую силу машины, получаемъ полный запасъ работы, который имѣется въ нашей системѣ. Этотъ запасъ не великъ и скоро будетъ израсходованъ отчасти на вредныя, отчасти на полезныя сопротивленія преодолѣваемыя машиною; затѣмъ машина должна остановиться. Надежда на то, что машина сама будетъ періодически поднимать опустившіеся грузы и такимъ образомъ вновь получать источникъ работы, совершенно неосновательна. Если центръ тяжести машины сначала будетъ опускаться, а затѣмъ поднимется на прежнюю высоту, то полная работа вѣса, за весь этотъ періодъ движенія, равна нулю; слѣд. тяжесть не можетъ служить непрерывнымъ источникомъ работы.

Совершенно такое же заключеніе можетъ быть сдѣлано и относительно другихъ силъ—упругости пружинъ, капиллярныхъ силъ, магнитнаго притяженія—такъ какъ всѣ онѣ имѣютъ консервативный характеръ; т. е. если разсматривать такой періодъ движенія, что въ концѣ его всѣ части машины придутъ въ положеніе одинаковое съ начальнымъ ихъ взаимнымъ размѣщеніемъ, то работа, доставленная силами за весь этотъ періодъ равна нулю. Опять оказывается, что здѣсь нѣтъ источника энергіи, который могъ бы постоянно пополнягь расходъ ея. Машина будетъ двигаться нѣкоторое время, преодолѣвая различныя сопротивленія, пока не израсходуетъ весь первоначальный запасъ энергіи, затѣмъ она остановится. Это произойдетъ даже тогда, если машина работаетъ въ пустую, т. е. не преодолѣваетъ никакого полезнаго сопротивленія, а движетъ только свои собственныя части. Все равно и при такомъ движеніи получаются различныя вредныя сопротивленія, которыя мало по малу поглотятъ первоначальную энергію машины и она должна будетъ остановиться. Всѣ такіе приборы представляютъ не источники энергіи, а разсѣеватели энергіи превращающіе ее мало по малу, черезъ посредство треній разнаго рода, въ теплоту.

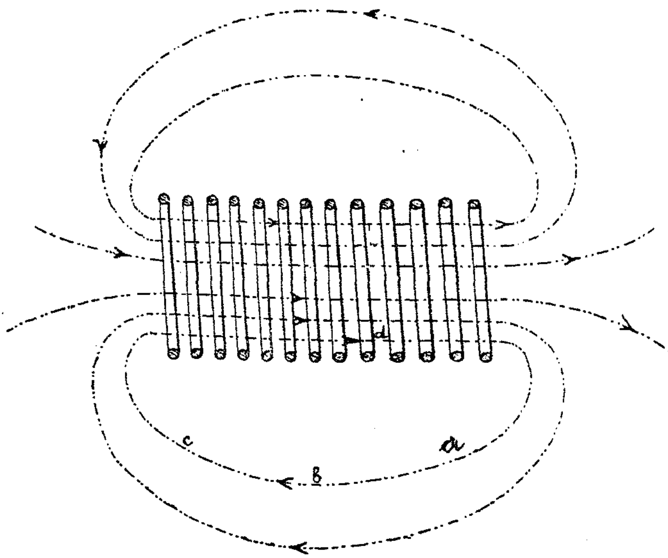
И такъ невозможность perpetuum mobile основана на томъ, что всѣ силы, дѣйствующія въ машинѣ, имѣютъ консервативный характеръ. Конечно получился бы другой результатъ, если бы силы были другаго характера, а именно такія, что, при возвращеніи всѣхъ частей машины въ начальное ихъ расположеніе, мы получали бы сумму работъ не равную нулю, а представляющую нѣкоторую положительную величину. Это была бы система не консервативная, не сохраняющая энергію, а система накопляющая энергію, аккумулативная. Будемъ повторять циклъ явленій, т. е. совокупность движеній, приводящихъ въ концѣ цикла къ тому же расположенію частей машины какое было въ началѣ. Каждый циклъ намъ дастъ положительную работу и мы можемъ при большомъ числѣ повтореній накопить значительное количество энергіи и пользоваться ею для нашихъ цѣлей, для производства разнообразныхъ полезныхъ работъ. Но для этого нужно имѣть аккумулативную систему, а всѣ физическія изслѣдованія показали, что въ природѣ всѣ силы консервативны.

Однако утопающій хватается за соломенку и люди, вѣрующіе въ perpetuum mobile, готовы заняться отысканіемъ аккумулативныхъ системъ и силъ. Большія надежда были возбуждены заглавіемъ одного мемуара знаменитаго астронома Эри: „О нѣкоторыхъ условіяхъ, при которыхъ возможно вѣчное движеніе“ *). Но условія, о которыхъ говоритъ Эри, представля-

*) Мемуаръ этотъ, написанный въ 1829 году, перепечатанъ въ приложеніи къ цитированной нами книгѣ Дёркса.

ютъ ничто иное, какъ аккумулативную систему, а гдѣ мы ее найдемъ? Вѣдь требуется, чтобы при возвращеніи системы въ начальное положеніе получался избытокъ работы силъ, дѣйствующихъ внутри системы, которая должна быть при этомъ изолирована, т. е. не должна получать энергію извнѣ.

Мы составимъ себѣ ясное понятіе о характерѣ этого требованія, если разсмотримъ слѣдующее явленіе: имѣемъ соленоидъ (фиг. 183), по которому идетъ токъ; какъ извѣстно при



Фиг. 183.

этомъ образуется около соленоида опредѣленное динамическое поле, и линіи силъ въ этомъ полѣ имѣютъ видъ, показанный на чертежѣ пунктиромъ; стрѣлки означаютъ направленіе силъ въ полѣ. Если единица магнитной массы будетъ двигаться въ полѣ, начиная изъ точки a, по стрѣлкѣ, и совершитъ циклъ $a b c d a$, то все время работа силъ поля на эту массу будетъ положительная, и въ результатѣ цикла мы получаемъ нѣкоторую выигранную работу. Повторяя этотъ же циклъ, мы будемъ постепенно запасать работу. Вотъ примѣръ системы, которая кажется аккумулативной. Но для полученія ея требуется токъ въ соленоидѣ, т. е. требуется сообщеніе энергіи извнѣ. Эта энергія будетъ доставляться или теплотой растворенія цинка въ электрическихъ элементахъ, дающихъ токъ; или теплотой горѣнія угля подъ котломъ паровой машины, которая вертитъ динамо-машину, доставляющую токъ. Нашъ приборъ (фиг. 183), только преобразовываетъ эту энергію, доставляемую извнѣ, а не запасаетъ ее; это не источникъ энергіи, а преобразователь ея. Между тѣмъ изобрѣтатели новой формаціи надѣются получить такое же динамическое поле, но безъ подвода энергіи извнѣ. А какую бы мы ни подбирали комбинацію притягивающихъ центровъ и взаимныхъ силъ, зависящихъ только отъ разстояній, никогда мы не получимъ динамическое поле такого характера, какъ разобранное на фиг. 183; всегда получимъ непремѣнно консервативную систему.

ШЕСТНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

Ударъ и мгновенныя силы.

265. ***Мѣра удара.*** Ударъ дѣйствуетъ лишь въ теченіи очень короткаго, трудно измѣримаго по своей малости, времени, а между тѣмъ, въ результатѣ получается замѣтное измѣненіе скорости. Такъ какъ это измѣненіе произошло въ теченіи очень короткаго времени, то ускореніе получаетъ очень большую величину; а слѣд. и силы, т. е. произведенія ускоренія на массу, тоже очень велики. И такъ, особенности явленія, называемаго ударомъ, заключаются въ томъ, что въ теченіи очень короткаго времени дѣйствуютъ громадныя силы. Въ отличіе отъ другихъ случаевъ эти силы называютъ мгновенными. Хотя по существу онѣ не отличаются отъ всѣхъ другихъ силъ, разсматриваемыхъ въ Динамикѣ, но малость времени дѣйствія мгновенныхъ силъ заставляетъ примѣнять въ случаѣ удара особые пріемы изслѣдованія, почему вопросъ объ ударѣ разсматривается отдѣльно.

Въ случаѣ удара очень неудобно, и часто невозможно, примѣнить обычные пріемы измѣренія силъ вѣсами, динамометрами и т. д. Также невозможно примѣнять динамическій способъ измѣренія силъ, т. е. опредѣленіе ихъ по величинѣ ускоренія; здѣсь невозможно замѣтить величину ускоренія. Трудность увеличивается еще тѣмъ обстоятельствомъ, что мгновенная сила, и соотвѣтствующая величина ускоренія, величины перемѣнныя; за тотъ короткій промежутокъ времени, когда происходитъ ударъ, сила и ускореніе измѣняются, начиная отъ нуля, переходя къ наибольшей величинѣ и опять опускаясь до нуля.

Поэтому для мгновенныхъ силъ необходимо установить особый пріемъ ихъ измѣренія, и особую мѣру этихъ силъ. Изучая нѣкоторую мгновенную силу P, заставимъ ее дѣйствовать на опредѣленное, покоящееся тѣло массы m; пусть результатомъ удара будетъ то, что это тѣло получило скорость V; такой опытъ даетъ намъ понятіе о величинѣ мгновенной силы. Примѣнимъ къ этому опыту Законъ Количествъ Движенія; такъ какъ имѣемъ дѣло съ перемѣнной силой, то *импульсъ или* толчокъ ея опредѣлится суммой элементарныхъ толчковъ, произведенныхъ въ теченіи времени удара t, т. е. импульсъ будетъ

$$\int_0^t P.dt.$$

Уравнивая его пріобрѣтенному количеству движенія, получимъ:

$$mV = \int_0^t P.dt.$$

Скорость V послѣ удара можетъ быть измѣрена и количество движенія

$$mV$$

мы найдемъ. Оно даетъ указаніе на величину силы, дѣйствовавшей при ударѣ; правда постепенное измѣненіе силы P остается неопредѣленнымъ, но оно намъ и не интересно. Мы за то получаемъ величину суммы всѣхъ толчковъ произведенныхъ силой въ короткое время удара, т. е.

$$\int_0^t P.dt;$$

этого намъ будетъ достаточно. Эту величину суммы толчковъ мы и приѣмемъ за мѣру величины удара, и для краткости будемъ называть ее прямо ударомъ. Величина его, какъ видимъ, можетъ быть опредѣлена опытомъ, измѣряя V и зная массу m. Напр. этимъ путемъ можно найти ударъ, производимый при выстрѣлѣ пороховыми газами на ядро; масса ядра извѣстна, а для измѣренія скорости ядра существуютъ многочисленные приборы.

Итакъ, въ случаѣ мгновенныхъ силъ, мы будемъ измѣрять ихъ, т. е. измѣрять ударъ, помощью сообщаемаго ими количества движенія

$$mV.$$

Для возможности численнаго рѣшенія вопросовъ о движеніи, мы должны имѣть такую мѣру для всѣхъ дѣйствующихъ въ нашемъ вопросѣ мгновенныхъ силъ, т. е. предварительно мгновенныя силы должны быть измѣрены указаннымъ способомъ. Этотъ пріемъ замѣняетъ, для мгновенныхъ силъ, то измѣреніе помощью вѣсовъ, динамометровъ, индикаторовъ, которое мы примѣняемъ для опредѣленія силъ не мгновеннаго характера, дѣйствующихъ въ теченіи не очень короткаго времени.

266. Стоитъ обратить вниманіе на то, что введенная нами мѣра мгновенныхъ силъ не однородна съ общепринятой мѣрой силъ. Дѣйствительно, для мгновенныхъ силъ имѣемъ произведеніе массы на скорость, а для немгновенныхъ—мѣрою служитъ произведеніе массы на ускореніе; но скорость и ускореніе неоднородны, а именно, означая измѣреніе длины черезъ L, а измѣреніе времени . . . T, получаемъ измѣренія:

$$\text{для скорости} \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{L}{T}$$

$$\text{для ускоренія} \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{L}{T^2} \, .$$

Поэтому если бы въ одномъ и томъ же уравненіи нѣкоторые члены содержали мгновенныя силы, а другіе—немгновенныя, то въ послѣднихъ долженъ былъ бы входить дополнительный множитель того же измѣренія какъ время; это требуется необходимымъ условіемъ однородности членовъ. Но подобный случай намъ никогда не встрѣтится; при дѣйствіи мгновенныхъ силъ, всегда можно пренебречь всѣми остальными силами; онѣ очень малы по сравненію съ мгновенными, и за короткое время удара не могутъ замѣтно вліять на движеніе системы.

267. ***Видоизмѣненіе Даламберова Начала для случая удара.*** Такое видоизмѣненіе вызывается тѣмъ, что въ случаѣ мгновенныхъ силъ нужно ввести особую мѣру силъ,—импульсы ихъ,—а слѣд. и уравненіе должно получить соотвѣтствующее преобразованіе, такъ чтобы вмѣсто самихъ силъ входили ихъ импульсы, т. е. мѣры ударовъ. При этомъ, какъ только что было указано, можно совершенно отбросить всѣ силы немгновеннаго характера, потому что время дѣйствія удара очень мало. По той же причинѣ можно считать, что, въ теченіи времени удара, точки системы вовсе не перемѣстились, т. е. можно пренебречь тѣми очень малыми перемѣщеніями, которыя произойдутъ за время удара. Все это влечетъ за собой значительное упрощеніе разсмотрѣнія дѣйствія удара. По окончаніи удара, т. е. по прекращеніи дѣйствія мгновенныхъ силъ, необходимо опять принять во вниманіе всѣ силы.

Чтобы разсуждать о видоизмѣненіи Даламберова Начала, изобразимъ эту теорему въ той формѣ, которую она получаетъ, если примѣняемъ Декартовы координаты, и механическую систему разсматриваемъ какъ совокупность матеріальныхъ точекъ. Тогда условіе равновѣсія внѣшнихъ силъ и силъ инерціи представляется уравненіемъ (21) (см. стр. 122).

$$\Sigma\left\{\left(X-m.\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m.\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m.\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}=0 \quad (21)$$

Подъ знакомъ Σ стоитъ то, что относится къ одной матеріальной точкѣ m, а знакъ Σ показываетъ, что нужно сложить подобныя выраженія для всѣхъ точекъ системы. Величины

$$X,\ Y,\ Z$$

представляютъ проекціи внѣшнихъ силъ. Члены

$$-m.\frac{d^2x}{dt^2}, -m\frac{d^2y}{dt^2}, -m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

изображаютъ проекціи силъ инерціи. Наконецъ

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z$$

изображаютъ возможныя перемѣщенія.

Переходя къ случаю мгновенныхъ силъ, умножимъ это уравненіе на элементъ времени dt, и проинтегрируемъ его въ предѣлахъ 0 и t, изображающихъ начало и конецъ удара. У насъ появятся члены

$$\int_0^t X.dt, \int_0^t Y.dt, \int_0^t Z.dt,$$

которые изображаютъ величины ударовъ, производимыхъ на точку m. Ихъ обозначимъ буквами

$$I,\ K,\ L.$$

Затѣмъ перейдемъ къ членамъ, выражающимъ силы инерціи, напр. къ члену

$$-m.\frac{d^2x}{dt^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (88).$$

Умножая на dt и интегрируя, получимъ вмѣсто

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

т. е. вмѣсто второй производной, первую производную, т. е. скорость по оси x,

$$\frac{dx}{dt}.$$

Но интегрированіе происходитъ въ предѣлахъ отъ 0 до t, **слѣд. нужно взять разность скоростей окончательной и начальной, которыя означимъ**

$$u' \text{ и } u.$$

Такимъ образомъ получимъ, по интегрированіи члена (88), выраженіе:

$$-m(u'-u)=mu-mu'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89).$$

Полученное выраженіе (89) есть разность количествъ движенія начальнаго и окончательнаго, т. е. до удара и послѣ удара. По принятой терминологіи эта разность должна быть названа количествомъ движенія потеряннымъ во время удара, или короче—потеряннымъ количествомъ движенія.

Сказанное о проекціи силы инерціи на ось x, относится и къ двумъ другимъ осямъ; для нихъ проекціи начальныхъ скоростей назовемъ v, w, а окончательныхъ скоростей: v′, w′. Такимъ образомъ результатомъ нашего преобразованія уравненія (21) будетъ слѣдующее уравненіе:

$$\Sigma\left\{\left(I+m(u-u')\right)\delta x+\left(K+m(v-v')\right)\delta y+\right.$$
$$\left.+\left(L+m(w-w')\right)\delta z\right\}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89).$$

Сравнивая его съ первоначальнымъ уравненіемъ (21), выражавшимъ Даламберово начало, видимъ, что въ новомъ уравненіи:

1) Вмѣсто внѣшнихъ силъ

$$X, \ Y, \ Z$$

появились удары

$$I, \ K, \ L.$$

2) Вмѣсто силъ инерціи

$$-m.\frac{d^2x}{dt^2}, \ -m.\frac{d^2y}{dt^2}, \ -m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

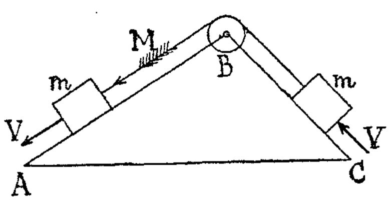
появились потерянныя количества движенія

$$m(u-u'), \ m(v-v'), \ m(w-w').$$

Но уравненіе Даламбера выражало, что внѣшнія силы уравновѣшиваются съ силами инерціи. Слѣд. наше новое уравненіе выражаетъ, что приложенные къ системѣ внѣшніе удары уравновѣшиваются съ количествами движенія потерянными при ударѣ.

Такъ видоизмѣняется начало Даламбера въ случаѣ удара. И здѣсь вопросъ приводится къ равновѣсію, но уравновѣшиваются—внѣшніе удары и потерянныя количества движенія. Мы слѣд. можемъ пользоваться извѣстными законами Статики, притомъ можемъ въ частныхъ случаяхъ брать эти законы въ любой формѣ, можемъ примѣнять Декартовы или другіе координаты; можемъ брать алгебрическія или геометрическія формы законовъ равновѣсія, или пользоваться словесными теоремами, изображающими законы равновѣсія въ частныхъ случаяхъ, и т. д. Форма уравненія (89) служила намъ лишь какъ простой символъ, въ которомъ заключаются всѣ условія равновѣсія для всѣхъ частныхъ случаевъ, и потому была удобна для доказательства общей теоремы. Но нѣтъ надобности всегда обращаться къ ней, когда рѣшаемъ частные вопросы, для которыхъ законы равновѣсія извѣстны.

268. *Примѣры. Двѣ массы* m, m′ *связанныя гибкой, нерастяжимой нитью, движутся на наклонныхъ плоскостяхъ* AB, BC (фиг. 184). Пусть начальныя скорости ихъ нули. На массу m дѣйствуетъ по направленію стрѣлки M ударъ; величина котораго равна K. Требуется найти скорость V, которую получатъ эти массы послѣ удара. Величина скорости одинакова для обѣихъ массъ, такъ какъ нить нерастяжима; направленія скоростей показаны на фигурѣ стрѣлками.



Фиг. 184.

Условіе равновѣсія для этой системы очень просто: сила, дѣйствующая на m по направленію нити отъ B къ A, должна равняться силѣ, дѣйствующей на m′ по направленію отъ B къ C. Здѣсь, кромѣ удара K, нужно ввести потерянныя количества движенія, т. е. разности

$$0 - mV,\ 0 - m'V.$$

И такъ условіе равновѣсія будетъ

$$K - mV = m'V;$$

откуда находимъ скорость

$$V = \frac{K}{m + m'}.$$

269. ***Вращеніе твердаго тѣла около неподвижной оси.*** Пусть въ началѣ тѣло находилось въ покоѣ, и приводится во вращеніе ударомъ. Пря вращеніи около неподвижной оси условіе равновѣсія силъ заключается въ томъ, что сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно оси вращенія равна нулю. Слѣд. мы получимъ уравненіе движенія выразивши, что моментъ удара, сложенный съ моментомъ потерянныхъ количествъ движенія, даетъ въ суммѣ нуль.

Величину момента удара (т. е. произведеніе величины удара на плечо его относительно оси) назовемъ M, и пусть результатомъ удара будетъ вращеніе, по направленію удара съ окончательной угловой скоростью ω. Мы знаемъ, что при такой скорости моментъ количества движенія будетъ

$$\omega . I,$$

гдѣ I моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія: но начальное количество движенія равно нулю, слѣд. моментъ потеряннаго количества движенія равенъ

$$0 - \omega I.$$

Условіе равновѣсія будетъ:

$$M - \omega I = 0;$$

отсюда находимъ угловую скорость, получающуюся вслѣдствіе удара:

$$\omega = \frac{M}{I}$$

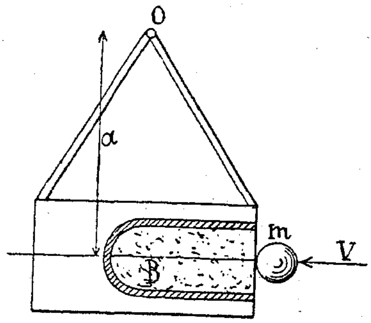
т. е. угловая скорость равна моменту удара раздѣленному на моментъ инерціи.

Сравнимъ этотъ результатъ съ тѣмъ, который получается въ случаѣ силъ не мгновенныхъ. Соотвѣтствующій вопросъ былъ разсмотрѣнъ въ n° 64, и мы получили, что угловое ускореніе равно моменту внѣшней силы раздѣленному на моментъ инерціи.

И такъ въ случаѣ удара получается теорема, отличающаяся отъ n° 64 только тѣмъ, что теперь вмѣсто момента силы появляется моментъ удара, а вмѣсто угловаго ускоренія имѣемъ угловую скорость.

270. Замѣтимъ, что вообще то видоизмѣненіе Даламберова Начала, которое мы получили для случая удара, находится путемъ интегрированія, и потому уравненія, получающіяся при этомъ, представляютъ интегралы уравненій движенія, т. е. даютъ скорости, а не ускоренія.

271. *Баллистическій маятникъ.* Этотъ приборъ долгое время примѣнялся для измѣренія начальной скорости ядеръ и пуль при вылетѣ ихъ изъ артилерійскихъ орудій *). Онъ состоитъ изъ массивнаго маятника (фиг. 185), качающагося на оси O; внутри имѣется чугунный котелъ B, наполненный пескомъ; въ него ударяется ядро сейчасъ же по вылетѣ изъ канала пушки; ядро, засѣвши въ пескѣ, соединяется съ маятникомъ въ одно цѣлое. Дѣйствіемъ удара сообщается маятнику угловая скорость ω около оси вращенія O; измѣривши ее мы можемъ опредѣлить скорость ядра V.



Фиг. 185.

Здѣсь мы имѣемъ случай вращенія твердаго тѣла около неподвижной оси, т. е. тотъ же вопросъ, какъ и въ n° 269. Но, разсматривая ядро и маятникъ какъ одну систему, мы заключаемъ, что при ударѣ между ними появляются взаимныя силы, всегда по двѣ равныя и прямо противуположныя; одна изъ нихъ—дѣйствіе ядра на маятникъ, а другая-обратное дѣйствіе маятника на ядро. Совокупность моментовъ такихъ двухъ силъ всегда будетъ равна нулю, и слѣд. силы удара вовсе не войдутъ въ наше уравненіе. Останутся только потерянныя количества движенія. Моментъ ихъ для маятника будетъ равенъ

$$-\omega . I$$

(I моментъ инерціи маятника относительно оси вращенія). Потерянная скорость для ядра представляется разностью

$$V - a\omega,$$

гдѣ a—разстояніе скорости V отъ оси O. Моментъ количества движенія, потеряннаго ядромъ, получится, умножая потерянную скорость на массу ядра m, и на плечо a относительно оси O. Поэтому уравненіе равновѣсія будетъ:

$$-\omega I + m a (V - a\omega) = o$$

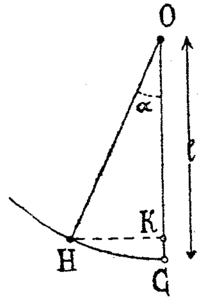
Мы бы могли получить сразу это уравненіе, пользуясь

*) Теперь онъ замѣняется электробаллистическими приборами.

Закономъ Сохраненія Моментовъ Количествъ Движенія относительно оси О.

Отсюда, зная ω, найдемъ скорость ядра V.

Что касается угловой скорости ω, то она найдется, наблюдая на какой уголъ отклоняется маятникъ вмѣстѣ съ ядромъ послѣ выстрѣла. Пусть этотъ уголъ есть α, а разстояніе центра тяжести G всей системы отъ оси привѣса равно l. (фиг. 186). Маятникъ отклоняется до тѣхъ поръ, пока его живая сила не будетъ поглощена работой вѣса его. При перемѣщеніи центра тяжести G въ точку остановки H, этотъ центръ поднимается на высоту.



Фиг. 186.

$$G\,K = l\,(1 - \mathrm{Cos}\,a).$$

При этомъ вѣсъ P+p. маятника съ ядромъ даетъ работу, численная величина которой равна.

$$(P+p)\;l\;(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha).$$

Живая сила системы сейчасъ послѣ удара будетъ состоять изъ живой силы ядра

$$\frac{1}{2}\,m\,V^2$$

и изъ живой силы маятника, равной половинѣ произведенія изъ квадрата угловой скорости на моментъ инерціи маятника I. Поэтому уравненіе живыхъ силъ даетъ:

$$\frac{1}{2}(m\,V^2 + \omega^2\;I) = (P+p)\,l.\,(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha),$$

откуда найдемъ α.

272. *Силы связи при ударѣ.* Эти силы будутъ имѣть характеръ мгновенныхъ силъ, т. е. будутъ очень велики, но кратковременны. Для нихъ примемъ ту-же мѣру, что и для приложенныхъ ударовъ, т. е. величину импульса

$$\int_0^t P.\,d\,t$$

за время удара. Измѣренныя такимъ образомъ силы связи будемъ называть ударами на связи. Мы знаемъ, на основаніи

Даламберова Начала, что, силы связи должны уравновѣсить и внѣшнія силы и силы инерціи. Поэтому въ случаѣ удара, пользуясь видоизмѣненіемъ Начала Даламбера, получимъ слѣдующее правило для нахожденія ударовъ:

Удары на связи должны уравновѣсить какъ внѣшніе приложенные удары, такъ и количества движенія, потерянныя во время удара.

По этой теоремѣ находимъ силы связи при ударѣ.

Если напр. имѣемъ случай тѣла вращающагося около неподвижной оси, то силы связи будутъ удары на ось въ мѣстахъ опоры ея. Эти удары найдутся совершенно такъ какъ мы находимъ, реакціи на подпоры оси по даннымъ внѣшнимъ силамъ; но вмѣсто внѣшнихъ силъ нужно ввести приложенные внѣшніе удары и потерянныя количества движенія.

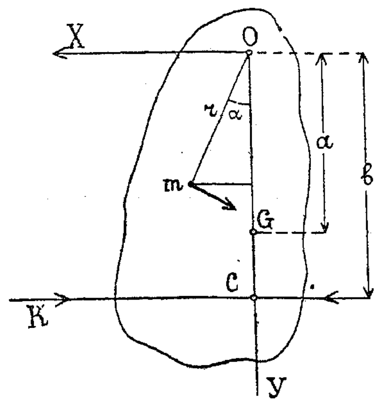
273. *Центръ удара.* Изъ предъидущаго понятно, что если имѣемъ твердое тѣло, вращающееся около неподвижной оси, то удары, приложенные къ этому тѣлу, вообще говоря передаются на ось, т. е. въ опорахъ появятся мгновенныя силы, удары на ось. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ такіе удары на ось отсутствуютъ, ихъ вовсе не будетъ, несмотря на то, что къ тѣлу приложены сильные удары. Разберемъ при какихъ условіяхъ это получается, т. е. когда удары не будутъ передаваться на ось?

Разсмотримъ случай когда на тѣло, находившееся въ покоѣ, подѣйствовалъ одинъ внѣшній ударъ K. Такъ какъ внѣшніе удары уравновѣшиваются съ потерянными количествами движенія, то ясно, что отсутствіе ударовъ на ось можетъ получиться только при соблюденіи слѣдующаго условія: всѣ потерянныя количества движенія должны приводиться къ одной равнодѣйствующей, которая должна быть равна и прямо противуположна удару K. Тогда эти количества движенія непосредственно уравновѣсятся съ K и не потребуется никакихъ дополнительныхъ силъ на оси для полученія равновѣсія, т. е. на ось не передается никакого удара.

274. Разберемъ подробно это условіе. Ось вращенія примемъ за ось Z; при вращеніи около этой оси, всѣ количества движенія составляютъ прямой уголъ съ направленіемъ оси Z слѣд. и равнодѣйствующая ихъ тоже составляетъ прямой уголъ съ направленіемъ Z, т. е. не имѣетъ слагающей параллельной оси Z. Отсюда первое условіе:

Ударъ K долженъ составлять прямой уголъ съ направленіемъ оси вращенія.

Координатную плоскость XY проведемъ перпендикулярно къ оси Z и притомъ такъ, чтобы эта плоскость заключала въ себѣ направленіе удара K; ось Y расположимъ перпендикулярно къ K, ось X будетъ параллельна удару K. (фиг. 187).



Фиг. 187.

Возьмемъ частицу тѣла, имѣющую массу m, и находящуюся на разстояніи r отъ оси вращенія. Координаты этой частицы назовемъ

$$x, y, z.$$

Если тѣло вслѣдствіе удара получить угловую скорость ω, то, количество движенія частицы m будетъ

$$m. \omega. r;$$

а проекціи этого количества движенія на оси X, Y будутъ

$$-m. \omega. r. \sin\alpha, \quad +m\,\omega\, r. \operatorname{Cos}\alpha,$$

или иначе:

$$-m\,\omega\, r.\frac{y}{r}, \quad +m. \omega. r.\frac{x}{r}$$

т. е.

$$-m\,\omega\, y, \quad +m\,\omega\, x.$$

Суммируя эти величины по всей массѣ тѣла M, получимъ количества движенія всего тѣла:

по оси X . . . . $-\omega.\ \Sigma\, my$

по оси Y . . . . $+\omega.\ \Sigma\, mx$

Если назовемъ массу всего тѣла M, а координаты его центра тяжести x_o, y_o, то какъ извѣстно

$$\Sigma\, my = My_o$$
$$\Sigma\, mx = Mx_o;$$

слѣд. предъидущія величины проекцій количества движенія всего тѣла замѣнятся слѣдующими:

для оси X . . . . $-\omega\, My_o$

для оси Y . . . . $+\omega\, Mx_o$.

Но ударъ K даетъ для оси Y проекцію равную нулю, такъ какъ перпендикуляренъ къ ней, слѣд. и проекція полнаго количества движенія тоже должна быть нулемъ. Отсюда получаемъ

$$x_0 = O$$

т. е. центръ тяжести тѣла долженъ лежать въ плоскости Z O Y, т. е. въ плоскости, проведенной черезъ ось вращенія перпендикулярно къ удару K. Или, это правило можно высказать слѣдующими словами, опредѣляющими направленіе удара:

Ударъ долженъ быть перпендикуляренъ къ плоскости, проведенной черезъ ось вращенія и центръ тяжести тѣла.

Это второе условіе. Оно включаетъ въ себѣ и первое условіе.

Затѣмъ продолжаемъ замѣну всѣхъ количествъ движенія одной равнодѣйствующей, которая должна быть равна и прямо противуположна K. Для этого количества движенія каждой массы m, т. е. величины

по оси X . . . . $-\omega . my$
по оси Y . . . . $+\omega . mx$,

перенесемъ изъ точки m въ мѣсто занимаемое проекціей этой точки на плоскости X O Y. При такомъ переносѣ получимъ пары силъ

$$\omega . myz$$
$$\omega . mxz,$$

а суммируя ихъ для всего тѣла, получимъ пары

$$\omega \Sigma myz$$
$$\omega \Sigma mxz.$$

Обѣ эти пары должны быть нулями, такъ какъ въ результатѣ сложенія должна получиться равнодѣйствующая, лежащая въ плоскости X O Y. И такъ имѣемъ

$$\Sigma mxz = 0 \qquad \Sigma myz = 0$$

т. е. третье условіе, которое состоитъ въ слѣдующемъ:

Ось вращенія должна быть главною осью для нашего начала координатъ, т. е. для точки, въ которой эта ось пересѣкается плоскостью, проведенной черезъ направленіе удара перпендикулярно къ оси вращенія.

И такъ мы привели всѣ количества движенія къ одной равнодѣйствующей параллельной оси X и равной

$$R = a . M . \omega, \quad . \ . \ . \ . \ (90)$$

гдѣ a есть координата y_0 центра тяжести тѣла. Чтобы узнать на какомъ разстоянiи b отъ оси 0 находится эта равнодѣйствующая, напишемъ, что моментъ ея равенъ суммѣ моментовъ количествъ движенiя отдѣльныхъ массъ. Этотъ послѣднiй моментъ, какъ мы знаемъ, равенъ произведенiю угловой скорости ω на моментъ инерцiи (I) тѣла относительно оси 0. И такъ получаемъ:

$$R.\, b = \omega.\, I$$

или вставляя величину R, получимъ

$$b = \frac{I}{Ma} \quad . \; . \; . \; (91).$$

Но равнодѣйствующая должна быть прямо противуположна удару K. слѣд. величина b даетъ разстоянiе удара K отъ оси вращенiя. И такъ имѣемъ четвертое и послѣднее условiе.

Разстоянiе удара отъ оси вращенiя должно быть равно

$$\frac{I}{Ma}.$$

Точка C, пересѣченiя удара съ нашей осью Y, называется центромъ удара. Вспомнивъ наши выводы относительно сложнаго маятника (n^0 65), видимъ, что центръ удара совпадаетъ съ центромъ качанiя нашего тѣла, если его разсматривать какъ сложный маятникъ.

При соблюденiи пересчитанныхъ выше четырехъ условiй, ударъ вовсе не передается на ось. Замѣтимъ, что относительно центра тяжести ставится только одно требованiе; этотъ центръ долженъ лежать въ плоскости Z0Y, т. е. въ плоскости, проведенной черезъ ось вращенiя перпендикулярно къ направленiю удара; но нѣтъ необходимости, чтобы этотъ центръ лежалъ непремѣнно на оси Y.

274. *Случай когда ось вращенiя проходитъ черезъ центръ тяжести.*

Возьмемъ частный случай когда центръ тяжести лежитъ на оси вращенiя; тогда

$$a = 0$$

и мы получаемъ изъ (91)

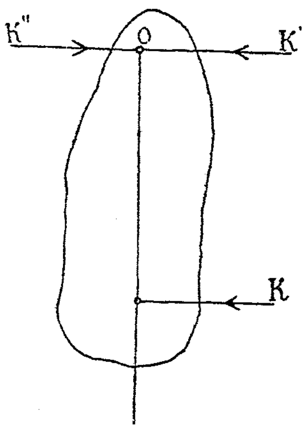
$$b = \infty$$

т. е. ударъ не будетъ передаваться на ось только въ томъ случаѣ, если онъ приложенъ къ тѣлу на безконечномъ разстояніи отъ оси. Другими словами: если ось вращенія проходитъ черезъ центръ тяжести тѣла, то всѣ удары, приложенные къ тѣлу, будутъ передаваться на ось.

Притомъ всякій ударъ будетъ передаваться на ось въ полной своей величинѣ. Дѣйствительно, если имѣемъ

$$a = 0,$$

то равнодѣйствующая количествъ движенія R (форм. 90) будетъ равна нулю, т. е. количества движенія составляютъ пару, имѣющую своею осью ту ось Z, около которой вращается тѣло. Такая пара можетъ уравновѣсить только пару. Вообразимъ, что кромѣ удара K (фиг. 188) у насъ приложены еще два противуположные удара на ось O, а именно K' и K'', которые равны и параллельны заданному удару K. Прибавка такихъ двухъ противуположныхъ ударовъ ничего не измѣняетъ, и слѣд. удары на оси остаются прежніе. Но теперь имѣемъ: во 1-хъ пару ударовъ:



Фиг. 188.

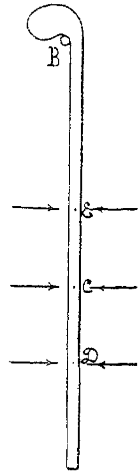
$$K, K'',$$

которая уравновѣсится съ парой количествъ движенія. Во 2-хъ остается ударъ K', который и передается цѣликомъ на ось, т. е. на ея опоры.

Этотъ частный случай имѣетъ особое значеніе въ машинахъ. Мы знаемъ, что вращающаяся часть машины часто уравновѣшивается, слѣд. центръ тяжести ея лежитъ на оси вращенія. Предыдущій выводъ показываетъ, что въ машинахъ всѣ удары, приложенные къ ихъ уравновѣшеннымъ вращающимся осямъ, цѣликомъ передаются на опоры оси, и портятъ эти опоры.

275. ***Простой опытъ, демонстрирующій существованіе центра удара.*** Нужно повѣсить палку съ загнутой ручкой (фиг. 189) на опору B; (опорой можетъ служить веревка, натянутая горизонтально). Попытками легко опредѣлить положеніе такой точки C, что ударъ, приложенный въ этомъ мѣстѣ, не сбрасываетъ палку съ опоры, какъ въ томъ случаѣ если ударъ идетъ справа, такъ и въ случаѣ удара съ лѣвой стороны; эти удары сообщаютъ палкѣ качанія около оси B. Точка C будетъ

центръ удара. Производя удары въ какую-нибудь точку D, лежащую ниже С, замѣтимъ, что ударъ справа сбрасываетъ палку, а ударъ слѣва—несбрасываетъ ее. Для точки $\mathcal{E}$, расположенной выше центра удара, получаемъ обратное явленіе: удары справа не сбрасываютъ палку, а удары слѣва сбрасываютъ ее съ опоры.



Фиг. 189.

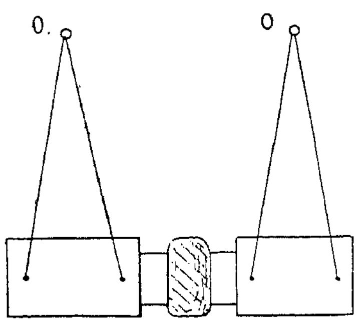
276. ***Практическіе случаи, въ которыхъ важно знать положеніе центра удара.***

a) Баллистическій маятникъ. Здѣсь необходимо достигнуть того, чтобы ударъ снаряда въ маятникъ не передавался на ось качанія маятника.

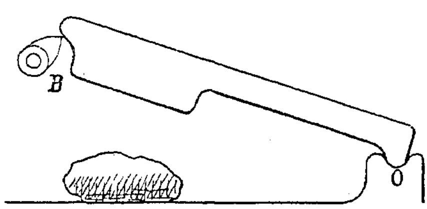
b) Тоже относится и къ прибору Шарпи, который примѣняется въ механическихъ лабораторіяхъ для ударной пробы металловъ, и состоитъ изъ маятника, ударяющаго при своемъ качаніи въ тотъ брусокъ металла, прочность котораго желаемъ изслѣдовать.

c) Сюда же относится молотъ-маятникъ предложенный нѣкогда горнымъ инженеромъ Талемъ для ковки (фиг. 190); качанія сообщаются маятнику особыми паровыми цилиндрами.

d) Лобовые молота, примѣняемые для ковки на заводахъ, движимыхъ водяной силой (фиг. 191). Кулакъ водяного колеса поднимаетъ молотъ, подпирая его у В; затѣмъ по проходѣ кулака, молотъ падаетъ, вращаясь около точки 0.



Фиг, 190.

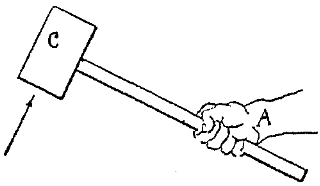


Фиг. 191.

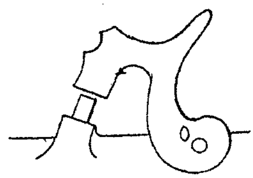
e) При ковкѣ ручными молотами важно, чтобы мѣсто удара С (фиг. 192) было приблизительно центромъ удара для точки А, гдѣ кузнецъ держитъ молотъ рукою; тогда удары почти не передаются на руку.

f) Курокъ ружья (фиг. 193) разбиваетъ ударомъ пистонъ; важно достигнуть того, чтобы ударъ не передавался на ось 0, около которой вращается курокъ; этимъ устраняется порча оси.

277. *Еще два приложенія.* I. Если на ось 0Z ударъ K вовсе не передается, то очевидно нѣтъ никакой надобности устраивать опоры для этой оси; и безъ нихъ дѣйствіемъ удара K будетъ сообщена угловая скорость вращенія около оси 0Z.



Фиг. 192.

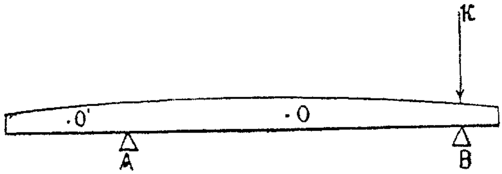


Фиг. 193.

Эта ось будетъ свободная ось вращенія для удара K. Явленіе это можно показать на опытѣ, взявъ тѣло, лежащее на горизонтальной плоскости, при отсутствіи тренія; нѣчто подобное происходитъ при ударѣ кіемъ въ билліардный шаръ.

Если, при томъ же ударѣ, выберемъ другую ось вращенія то окажется, что на нее передается ударъ; слѣд. для возможности вращенія необходимо, чтобы ось имѣла опоры, была связана; это уже не свободная ось вращенія, а насильственная.

II. Возьмемъ тяжелую балку, лежащую на двухъ опорахъ, A, B, (фиг. 194) и предположимъ мгновенное разрушеніе опоры B. Это равносильно приложенію въ точкѣ B удара, означеннаго стрѣлкою. Наша балка получитъ стремленіе вращаться около оси, которая опредѣлится, по правиламъ, изложеннымъ въ n° 273. Если эта ось приходится между A и B (точка 0), то лѣвый конецъ балки поднимется надъ опорой.



Фиг. 194.

Если же упомянутая ось лежитъ внѣ опоръ (точка O′), то такого приподниманія не получится.

278. *Законъ Количествъ движенія и Законъ Моментовъ Количествъ движенія для случая удара.* Къ этимъ законамъ приложимо тоже самое видоизмѣненіе, которое мы объяснили для Даламберова Начала. При этомъ нужно прини-

мать во вниманіе только мгновенныя силы и конечно исключительно **внѣшнія**, такъ какъ внутреннніе удары всѣ исключаются.

279. *Законъ Живыхъ Силъ въ случаѣ удара.* Примѣняя эту общую теорему, мы не получаемъ непремѣннаго исключенія внутреннихъ силъ. Слѣд. и внутренніе удары вообще говоря не исчезаютъ изъ уравненія, а должны быть приняты во вниманіе.

Полное исключеніе работы внутреннихъ ударовъ между частями системы происходитъ только въ частномъ случаѣ, когда, къ концу удара, тѣла вполнѣ возстановляютъ свою форму, которую они имѣли до удара; мы знаемъ, что при этомъ работа внутреннихъ силъ, произведенная ими за все время удара, равна нулю. При такихъ условіяхъ внутренніе удары не измѣняютъ живую силу системы.

Замѣтимъ, что подобные случаи вполнѣ упругихъ ударовъ довольно рѣдки.

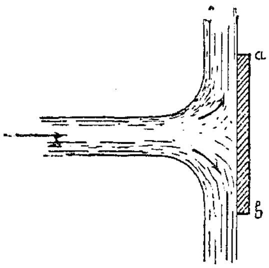
При неупругомъ ударѣ, когда къ концу удара первоначальная форма тѣла не вполнѣ возстановляется, мы имѣемъ нѣкоторую работу внутреннихъ силъ ударявшихся тѣлъ. Эта работа всегда отрицательная, такъ какъ тѣла всегда сопротивляются измѣненію своей формы. Слѣдовательно результатомъ неупругаго удара между частями системы, будетъ уменьшеніе живой силы. Другими словами можно сказать: при неупругихъ ударахъ происходитъ потеря живой силы.

Между тѣмъ количество движенія системы никогда не измѣняется отъ внутреннихъ ударовъ ея частей, даже если эти удары неупругіе.

Мы не будемъ останавливаться на всѣмъ извѣстныхъ частныхъ случаяхъ удара двухъ упругихъ и неупругихъ шаровъ, а разсмотримъ болѣе общимъ образомъ вопросъ объ измѣненіи живой силы при ударѣ.

280 *Общее понятіе о неупругомъ ударѣ.* Мы будемъ называть неупругимъ ударомъ всякое быстрое (почти мгновенное) **введеніе новой** связи въ систему; связь эта измѣняетъ условія возможныхъ перемѣщеній; нѣкоторыя перемѣщенія, которыя прежде дозволялись, становятся невозможными вслѣдствіе введенія новой связи. При томъ будемъ предполагать, что введенная новая связь затѣмъ остается въ системѣ и не уничтожается.

Подъ это обобщенное понятіе о неупругомъ ударѣ подходитъ не только все то, что называется неупругимъ ударомъ въ общежитіи, но и многое другое. Такъ напр. пусть (фиг. 195) струя воды встрѣчаетъ плоскую лопатку *ab*, заставляющую ее растекаться по сторонамъ; это новая, постоянная связь, и слѣд. мы должны считать это неупругимъ ударомъ, хотя имѣемъ дѣло съ двумя упругими тѣлами—водою и твердой лопаткой. Во избѣжаніе неловкостей терминологіи лучше отказаться вовсе отъ терминовъ: упругій ударъ и неупругій ударъ. Будемъ называть всякое быстрое введеніе новой связи—ударомъ. Для быстраго уничтоженія существующей связи примемъ терминъ: взрывъ. Тогда то, что называется въ общежитіи упругимъ ударомъ, будетъ представлять совокупность двухъ явленій—удара и взрыва; сначала вводится новая связь—одно ударяющееся тѣло связываетъ движеніе другаго; а затѣмъ эта связь уничтожается и оба тѣла дѣлаются свободными.



Фиг. 195.

281. ***Потеря живой силы при ударѣ. Теорема Карно.*** Если слово ударъ понимать въ смыслѣ введенія новой связи, то всякій ударъ влечетъ за собою потерю живой силы. Размѣръ этой потери опредѣляется теоремой Карно, которую мы сейчасъ выведемъ.

Мы будемъ говорить о внутреннихъ ударахъ, т. е. объ ударахъмежду частями системы, слѣд. о такихъ, при которыхъ вызываются взаимныя мгновенныя силы, подчиненныя закону равенства между дѣйствіемъ и противудѣйствіемъ. Эти силы не войдутъ въ уравненіе, даваемое видоизмѣненіемъ Даламберова Начала, а такъ какъ внѣшнихъ приложенныхъ ударовъ въ нашей задачѣ нѣтъ, то въ уравненіи останутся только потерянныя количества движенія. Для какой нибудь частицы m, назовемъ ея скорости до удара, по тремъ координатнымъ осямъ черезъ

$$u,\ v,\ w;$$

скорости же послѣ удара означимъ

$$u',\ v',\ w'.$$

Тогда потерянныя количества движенія будутъ, для точки имѣющей массу m:

$$m\ (u-u'),\ m\ (v-v'),\ m.(w-w').$$

Такъ какъ потерянныя количества движенія уравновѣшиваются, то мы примѣнимъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній. Количества движенія точки m должны умножаться на возможныя для этой точки перемѣщенія, и общая сумма такихъ произведеній для всей системы должна быть нулемъ. Но послѣ удара, т. е. со введеніемъ новой связи, возможными перемѣщеніями оказываются тѣ, которыя дозволяются новой связью; этому условію удовлетворяють тѣ безконечно малыя перемѣщенія, которыя получатся въ дѣйствительности послѣ удара. Такъ какъ скорости послѣ удара будутъ

$$u', v', w'$$

то, называя элементъ времени чевезъ dt, получимъ такія дѣйствительныя перемѣщенія точки m

$$u'. dt, v'.dt, w'.dt \text{ *)}.$$

Ихъ и нужно ввести въ качествѣ дозволенныхъ перемѣщеній. Слѣд. уравненіе равновѣсія потерянныхъ количествъ движенія, даваемое Началомъ Возможныхъ Перемѣщеній, будетъ

$$\Sigma . \left\{ m \left[(u-u').u'dt + (v-v')\,v'dt + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (w-w').w'dt \right] \right\} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (95).$$

Живая сила до удара опредѣляется суммой

$$\Sigma m\,(u^2 + v^2 + w^2),$$

а послѣ удара она равна

$$\Sigma m\,(u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

слѣд. живая сила, потерянная при ударѣ, будетъ

$$T = \frac{1}{2}\,\Sigma m\,(u^2 + v^2 + w^2) - \frac{1}{2}\Sigma m\,(u'^2 + v'^2 + w'^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (96).$$

Но изъ уравненія (95), сокращая на dt, получимъ

$$0 = \Sigma m\,(uu' + vv' + w.w') - \Sigma m\,(u'^2 + v'^2 + w'^2).$$

---

*) Если мы возьмемъ скорости до удара

$$u, v, w,$$

то соотвѣтствующія имъ безконечно малыя перемѣщенія

$$u.dt, v.dt, w.dt$$

не будутъ относиться къ числу возможныхъ, дозволяемыхъ новой связью, и потому не годятся для нашего уравненія, которое выражаетъ равновѣсіе количествъ движенія потерянныхъ во время удара.

Послѣднее уравненіе вычтемъ изъ (96); получимъ:

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m\,(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}\Sigma m\,(u'^2 + v'^2 + w'^2) - \\ - \Sigma m\,(uu' + vv' + ww'),$$

что легко преобразовать въ такую форму

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m \left[(u - u')^2 + (v - v')^2 + (w - w')^2 \right]$$

Это выраженіе и представляетъ теорему Карно. Оказывается, что T всегда положительна, т. е. при ударѣ всегда теряется живая сила. Послѣднее уравненіе указываетъ и величину этой потери. Такъ какъ

$$u - u',\quad v - v',\quad w - w'$$

означаютъ, въ проекціяхъ на координатныя оси, величины скоростей потерянныхъ при ударѣ, то

$$\frac{1}{2}\Sigma m \left[(u - u')^2 + (v - v')^2 + (w - w')^2 \right]$$

есть живая сила вычисленная для потерянныхъ скоростей. И такъ по теоремѣ Карно, имѣемъ:

Живая сила, потерянная при ударѣ, получится если вычислимъ живую силу системы, отвѣчающую потеряннымъ скоростямъ.

282. Эта теорема имѣетъ многочисленныя приложенія при изученіи движенія машинъ. Потеря живой силы, съ практической точки зрѣнія, означаетъ денежный расходъ, который нужно стараться по возможности уменьшить. Поэтому всегда тщательно изучаютъ эту потерю и слѣдятъ за нею.

Въ особенности часто приходится примѣнять теорему Карно въ Гидравликѣ, гдѣ постоянно встрѣчаются удары струй воды между собою, или удары воды о лопатки, ковши колесъ и т. д. Въ курсахъ Гидравлики теорему о потерѣ живой силы при ударѣ обыкновенно называютъ теоремой Борда, и даже нерѣдко авторы этихъ курсовъ утверждаютъ, что теорема Борда, есть нѣчто отличное отъ теоремы Карно, и требующее особаго доказательства. Но, разсматривая приводимыя этими авторами доказательства, мы видимъ, что они только повторяютъ тотъ ходъ разсужденій, путемъ котораго мы пришли къ теоремѣ Карно *).

*) См. Résal. Traité de Mécanique génerale. T. II p. 296.

283. *Слѣдствіе.* Представимъ себѣ, что мы, помощью внѣшняго приложеннаго удара, приводимъ въ движеніе твердое тѣло, находящееся въ покоѣ. Если это тѣло свободно, то вся работа удара пойдетъ на сообщеніе тѣлу живой силы. Если же тѣло связано, то произойдетъ ударъ между тѣломъ и связью, слѣд. будетъ потеря живой силы; поэтому, при той же величинѣ удара, сообщенная живая сила будетъ меньше, чѣмъ въ случаѣ свободнаго тѣла. И такъ: при данной величинѣ удара наибольшая живая сила получится для того случая, когда тѣло совершенно свободно.

Но свободное тѣло вслѣдствіе удара K (фиг. 187) получить вращеніе около оси O, положеніе которой опредѣляется правилами, которые мы излагали въ n° 273, говоря о центрѣ удара. Эту ось мы назвали свободной осью для случая удара K; всѣ прочія оси будутъ насильственныя, и для полученія вращенія около нихъ требуется поддержка опоръ, связь. Мы видимъ, что свободная ось владѣетъ слѣдующимъ свойствомъ: при вращеніи около нея получается наибольшая живая сила.

284. ***Взрывъ.*** Мы опредѣлили взрывъ какъ внезапное уничтоженіе связи въ системѣ. Результатомъ его получается увеличеніе свободы движенія. Нѣкоторыя перемѣщенія, которыя не дозволялись связью, послѣ уничтоженія ея оказываются возможными. Вслѣдствіе взрыва всегда получается увеличеніе живой силы системы, и величина этого увеличенія опредѣляется теоремой, вполнѣ сходной съ предъидущей теоремой Карно, а именно:

Живая сила, пріобрѣтенная при взрывѣ, опредѣляется, вычисляя живую силу системы, отвѣчающую пріобрѣтеннымъ скоростямъ.

Подъ названіемъ „пріобрѣтенная скорость“ нужно подразумѣвать разность между скоростью послѣ взрыва, и скоростью до взрыва, т. е., при прежнихъ нашихъ обозначеніяхъ разности

$$u'-u, \quad v'-v, \quad w'-w;$$

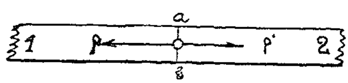
здѣсь u, v, w—скорости до взрыва, u', v', w'—скорости послѣ взрыва.

Теорема эта доказывается совершенно аналогично предъидущей теоремѣ Карно, такъ что придется повторить всѣ прежнія разсужденія. Начинаемъ съ видоизмѣненнаго Даламберова Начала, которое относится ко всѣмъ случаямъ мгновенныхъ силъ, а слѣд. и къ взрывамъ. Нужно написать условіе равновѣсія количествъ движенія потерянныхъ при дѣйствіи мгновенныхъ силъ, т. е. величинъ.

$$m\,(u-u'),\ m\,(v-v'),\ m\,(w-w').$$

Но въ случаѣ взрыва возможныя перемѣщенія будутъ другія чѣмъ при ударѣ. Здѣсь нужно взять тѣ перемѣщенія, которыя были возможны до взрыва, т. е. до уничтоженія связи. Въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ разсужденіемъ: мы примѣняемъ Начало Возможныхъ Перемѣщеній съ той цѣлью, чтобы исключить изъ уравненія неизвѣстныя мгновенныя силы, развивающіяся при взрывѣ; но для этого нужно взять непремѣнно тѣ перемѣщенія, которыя были дозволены до разрушенія связи, когда точки приложенія двухъ взаимныхъ мгновенныхъ силъ имѣли одинаковыя перемѣщенія. Послѣ взрыва эти перемѣщенія могутъ быть не одинаковы для двухъ взаимныхъ силъ, и такія перемѣщенія не годятся для исключенія неизвѣстныхъ мгновенныхъ силъ.

Для примѣра разсмотримъ разрывъ какого нибудь стержня въ машинѣ; по сѣченію *ab* онъ раздѣляется на двѣ части 1 и 2. (фиг. 196). Въ мѣстѣ разрыва появляются двѣ равныя и прямо противуположныя сили p, p′. До разрыва точки приложенія ихъ имѣютъ одинаковыя перемѣщенія, и сумма работъ силъ для этихъ перемѣщеній равна нулю. Но этого не будетъ послѣ разрыва.



Фиг. 196.

И такъ, составляя условіе равновѣсія потерянныхъ количествъ движенія, мы должны взять тѣ перемѣщенія, которыя были возможны до взрыва, т. е.

$$u.\ dt,\ v.\ dt,\ w.\ dt;$$

тогда вмѣсто прежняго уравненія равновѣсія (95), получимъ слѣдующее:

$$\Sigma m\ \left\{(u-u')\,u\,dt+(v-v')\,v\,dt+(w-w')\,w\,dt\right\}=0\ (97)$$

Живая сила, пріобрѣтенная при взрывѣ, будетъ разность окончательной и начальной живой силы, т. е.:

$$T=\frac{1}{2}\Sigma m\ (u'^2+v'^2+w'^2)-\frac{1}{2}\Sigma m\ (u^2+v^2+w^2)$$

Приложимъ къ правой части послѣдняго равенства выраженіе (97), сокращенное на dt; получимъ

$$T=\frac{1}{2}\Sigma m(u'^2+v'^2+w'^2)+\frac{1}{2}\Sigma m\ (u^2+v^2+w^2)-\Sigma m\ (uu'+vv'+ww')$$

А это простымъ преобразованіемъ приводится къ виду:

$$T=\frac{1}{2}\Sigma m\ \left[(u'-u)^2+(v'-v)^2+(w'-w)^2\right]\ .\ .\ .\ (98),$$

въ которомъ и заключается указанная общая теорема о взрывахъ. Дѣйствительно формула (98) указываетъ, что T всегда положительное, т. е. всегда есть выигрышъ живой силы; величина этого выигрыша находится вычисляя живую силу для скоростей, пріобрѣтенныхъ при взрывѣ.

285. ***Примѣры.*** Кромѣ взрыва гранатъ, и вообще дѣйствія взрывчатыхъ веществъ, укажемъ еще на слѣдующія явленія, входящія въ категорію взрыва по данному нами опредѣленію:

a) На подъемной машинѣ, стоящей колесами на рельсахъ, поднятъ цѣпью тяжелый грузъ. Вдругъ цѣпь разрывается, по недостатку прочности. Или мы нарочно особымъ приспособленіемъ быстро уничтожаемъ соединеніе груза съ цѣпью; (это дѣлается при опусканіи въ море тяжелыхъ бетонныхъ массивовъ, изъ которыхъ строятъ набережныя, молы, брекватеры и другія приморскія сооруженія). При такомъ быстромъ разрывѣ или разъединеніи цѣпи, подъемная машина подпрыгиваетъ надъ рельсами, и затѣмъ падая внизъ, можетъ поломать свои колеса. Для устраненія этого колеса нужно дѣлать стальными и очень прочными.

b) Мы имѣемъ машину для пробы прочности металловъ, и производимъ на ней растяженіе и разрывъ брусковъ. Если испытываемый матеріалъ не пластиченъ (чугунъ, инструментальная сталь), то разрывъ бруска происходитъ мгновенно, что представляетъ явленіе взрыва. При этомъ иногда разстраиваются соединенія частей машины, соскакиваютъ болты, муфты, кольца и т. д.

СЕМНАДЦАТАЯ БЕСѢДА.

Динамическія модели (типы, образцы).

286. Часто случается, что вопросы Динамики или Математической Физики, различающіеся между собою по существу, приводятъ къ уравненіямъ совершенно одинаковымъ по виду. Аналитическая форма уравненій оказывается одинаковой для двухъ и болѣе вопросовъ, хотя буквы, входящія въ члены уравненій, изображаютъ въ этихъ вопросахъ совершенно различныя, часто неоднородныя, величины. Такое формальное сходство позволяетъ примѣнять одинаковые математическіе пріемы для интегрированія и разрѣшенія уравненій; мы пользуемся рѣшеніемъ, полученнымъ для одного вопроса, и примѣняемъ его для другихъ, изображающихся такими же уравненіями. Одинъ вопросъ служитъ моделью, или образцомъ для нѣсколькихъ другихъ; мы можемъ прямо списать готовое уже рѣшеніе, находя совершенно излишнимъ вновь повторять всѣ прежнія выкладки и выводы.

Такіе случаи сходства довольно часты, и на это не всегда обращаютъ должное вниманіе въ курсахъ по Прикладной Механикѣ. Вмѣсто того, чтобы ограничиться ссылкой на давно извѣстный образецъ, и взять готовое рѣшеніе, разбираютъ вопросъ вновь и совершенно самостоятельно, безъ всякой связи съ другими.

Мы укажемъ на нѣкоторые типы, встрѣчающіеся чаще другихъ.

287. ***Первымъ типомъ служитъ равноускоренное*** движеніе, встрѣчающееся въ массѣ вопросовъ. Оно можетъ быть прямолинейнымъ или криволинейнымъ, можно говорить о движеніи точки, или о движеніи тѣла; при поступательномъ движеніи, мы говоримъ о линейной скорости, а при вращательномъ — объ угловой скорости, но и то и другое движеніе могутъ быть равно ускоренными; въ n° 236, мы имѣемъ примѣръ

равноускореннаго движенія по винту. Но во всѣхъ этихъ случаяхъ формулы получаются одинаковыя,—это извѣстныя формулы паденія тяжелыхъ тѣлъ.

288. *Второй типъ. Вертикальное паденіе тяжелаго тѣла, снабженнаго парашютомъ.* На это тѣло дѣйствуетъ вѣсъ и сопротивленіе воздуха; послѣднее будемъ считать пропорціональнымъ квадрату скорости. Ускореніе тяжести назовемъ g, а для ускоренія, производимаго сопротивленіемъ воздуха, примемъ обозначеніе

$$g.\frac{v^2}{\kappa^2},$$

гдѣ v — скорость, к — коеффиціентъ, опредѣленный опытомъ. Такъ какъ эти два ускоренія противуположны одно другому, то полное ускореніе, направленное внизъ, будетъ

$$g-g\frac{v^2}{\kappa^2}.$$

Но съ другой стороны полное ускореніе въ прямолинейномъ движеніи, по самому опредѣленію понятія объ ускореніи, есть производная скорости по времени, слѣд. имѣемъ:

$$\frac{dv}{dt}=g-g\frac{v^2}{\kappa^2}\quad.\ .\ .\ .\ .\ (99)$$

или

$$\frac{dv}{\kappa^2-v^2}=\frac{g}{\kappa}\,dt.$$

Послѣднее уравненіе легко интегрируется, такъ какъ перемѣнныя v и t въ немъ раздѣлены; притомъ въ лѣвой части равенства приходится интегрировать очень простую дробную функцію, а интегралъ правой части будетъ

$$\frac{g}{\kappa}t+C.$$

Произведемъ интегрированіе, а произвольную постоянную опредѣлимъ по условіямъ, относящимся къ началу движенія, принимая начальную скорость нулемъ, т. е. имѣемъ условіе:

при $t=o$ будетъ $v=o$.

Результатомъ интегрированія будетъ уравненіе:

$$\log.\,\mathrm{nat}\frac{\kappa-v}{\kappa+v}=\frac{2g}{\kappa}\,t$$

а переходя отъ логарифмовъ къ неопредѣленно степеннымъ функціямъ, найдемъ

$$v = к.\frac{e^{\frac{gt}{к}} - 1}{e^{\frac{2g}{к}t} + 1} \; . \; . \; . \; . \; . \; (100)$$

Если путь, пройденный за время t отъ начала движенія, назовемъ s, то скорость v будетъ

$$v = \frac{ds}{dt}\,.$$

Подставляя это выраженіе въ (100), получаемъ зависимость между ds и dt; въ такомъ видѣ уравненіе легко интегрируется и мы получаемъ.

$$s = \frac{к^2}{g}\,.\log.\text{nat.}\,\frac{e^{\frac{gt}{к}} - e^{-\frac{gt}{к}}}{2}$$

Такимъ образомъ вопросъ вполнѣ рѣшенъ.

Полагая въ урав. (100)

$$t = \infty,$$

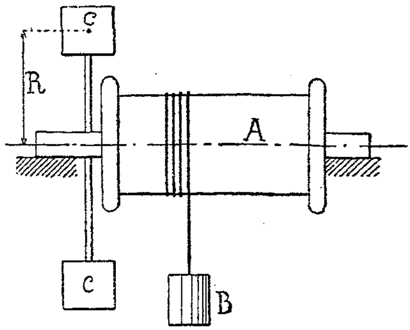
получаемъ

$$v = к$$

т. е. коэффиціентъ к представляетъ предѣлъ, къ которому стремится скорость движенія съ увеличеніемъ времени. Приблизительное значеніе этой предѣльной величины легко находится на опытѣ, такъ какъ, уже по прошествіи не очень большаго времени, движеніе дѣлается почти равномѣрнымъ; скорость этого равномѣрнаго движенія и можетъ быть принята за величину коэффиціента к. Это самый простой пріемъ для нахожденія коэффиціента сопротивленія воздуха.

289. Изложенная простая задача (рѣшенная еще Ньютономъ, въ Principia, но въ другой формѣ) служитъ типомъ для многихъ вопросовъ Прикладной Механики; мы приведемъ два примѣра.

I. Крылачъ. Въ часахъ и другихъ приборахъ нерѣдко примѣняютъ приспособленіе для полученія равномѣрнаго движенія, состоящее изъ нѣсколькихъ быстро вращающихся крыльевъ, которые встрѣчаютъ при своемъ движеніи значительное сопротивленіе воздуха. Упрощенный приборъ этого рода изображенъ на фиг. 197. Здѣсь A—барабанъ, приводимый во вращеніе грузомъ B; на оси барабана сидятъ крылья C, C.



Фиг. 197.

Такъ какъ здѣсь имѣемъ вращеніе около неподвижной оси, то нужно брать моменты силъ около этой оси. Сумма моментовъ внѣшнихъ силъ и силъ инерціи должна быть нулемъ. Изъ внѣшнихъ силъ у насъ дѣйствуютъ: вѣсъ груза B и сопротивленіе воздуха на крылья C; треніемъ пренебрегаемъ.

Если r есть радіусъ барабана, то моментъ груза B будетъ равенъ его вѣсу p, умноженному на r. Величина сопротивленія воздуха пропорціональна квадрату скорости крыльевъ; если назовемъ скорость опускающагося груза B черезъ v, то скорость крыльевъ можетъ быть принята равной

$$\frac{v.R}{r}$$

(R—радіусъ центра крыла); сопротивленіе будетъ

$$k.v^2.\ \frac{R^2}{r^2}$$

(k—коеффиціентъ, опредѣляемый опытомъ). Моментъ сопротивленія воздуха получится, умножая это сопротивленіе на плечо R, и взявъ произведеніе со знакомъ минусъ.

Далѣе сила инерціи опускающагося груза B будетъ

$$-\,m.\ \frac{dv}{dt}\ ,$$

а ея моментъ

$$-\,m.\ \frac{dv}{dt}\ .r.$$

Затѣмъ моментъ силъ инерціи всѣхъ вращающихся частей, будетъ отрицательный и измѣряется произведеніемъ угловаго ускоренія ω на моментъ инерціи I этихъ частей относительно оси вращенія. Угловое же ускореніе получится дѣля линейное ускореніе окружности барабана на его радіусъ r, слѣд. угловое ускореніе будетъ равно

$$\frac{1}{r}\ .\ \frac{dv}{dt}\ .$$

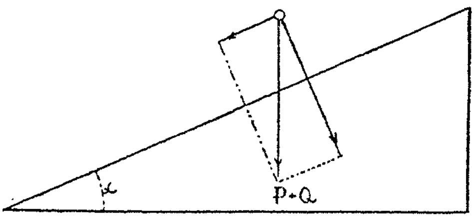
Соединяя всѣ эти моменты получимъ уравненіе:

$$p.r - kv^2 \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot R - m . \frac{dv}{dt} r - \frac{1}{2} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot I = 0.$$

Обращая главное вниманіе на перемѣнныя величины, мы можемъ написать послѣднее уравненіе въ формѣ

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv^2$$

гдѣ A и B постоянныя. Такимъ обозначеніемъ мы привели наше уравненіе къ совершенному формальному согласію съ уравненіемъ (99) предъидущаго n°, и слѣд. можемъ воспользоваться предъидущимъ рѣшеніемъ, сдѣлавъ только замѣну буквъ.



Фиг. 198.

290. II. *Движеніе паровоза внизъ по уклону, когда закрытъ впускъ пара въ цилиндръ.* Въ этомъ случаѣ движущей силой является та слагающая вѣса поѣзда, которая идетъ параллельно уклону (фиг. 198). Назовемъ синусъ угла уклона α черезъ i, вѣсъ паровоза съ тендеромъ черезъ P, а вѣсъ всѣхъ вагоновъ . . . Q; движущая сила будетъ

$$(P + Q)\ i.$$

Опыты показываютъ, что сопротивленіе движенію вагона, можетъ быть принято пропорціональнымъ вѣсу его, и на одну тонну поѣзда представляетъ величину

$$\lambda + \mu V^2$$

гдѣ V—скорость движенія, μ, λ коеффиціенты. Подобная же формула представляетъ и сопротивленіе паровоза съ тендеромъ, но коеффиціенты μ, λ должны быть замѣнены другими, которые назовемъ μ_1, λ_1. И такъ сопротивленіе вагоновъ будетъ

$$Q.(\lambda + \mu V^2)$$

а паровоза съ тендеромъ

$$P(\lambda_1 + \mu_1 V^2).$$

Масса всего поѣзда равна

$$\frac{P + Q}{g},$$

а ускореніе его изображается производной отъ скорости

$$\frac{dV}{dt}.$$

Слѣд. уравненіе движенія будетъ

$$(P+Q)\cdot\frac{1}{g}\cdot\frac{dV}{dt}=(P+Q)\,i-P\,(\lambda_1+\mu_1\,V^2)-Q\,(\lambda+\mu\,V^2).$$

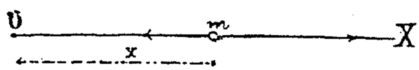
Опять, обращая главное вниманіе на перемѣнныя величины, видимъ, что это уравненіе имѣетъ форму

$$\frac{dV}{dt}=A-B.V^2$$

(A, B—постоянныя), слѣд. пришли къ прежнему типу, и можемъ воспользоваться прежнимъ рѣшеніемъ.

Наблюденіе за движенімъ поѣзда внизъ по уклону представляетъ одинъ изъ способовъ изученія сопротивленія поѣзда движенію (опыты Франка и др.). При этомъ пользуясь приведеннымъ нами рѣшеніемъ можно найти коеффиціенты λ, μ, λ_1, μ_1.

291. *Третій типъ. Гармоническое движеніе.* Простѣйшій случай этого типа получается, когда матеріальная точка m (фиг. 199) движется по прямой линіи OX подъ дѣйствіемъ притяженія къ неподвижному центру O, если сила притяженія прямо пропорціональна разстоянію между массой m и притягивающимъ центромъ.



Фиг. 199.

Пусть масса движущейся точки есть m, а величину силы притяженія означимъ черезъ kx. Она направлена прямо противуположно координатѣ x, слѣд. ускореніе по направленію положительныхъ x—овъ будетъ

$$-\frac{1}{m}kx.$$

Уравнивая эту проекцію общему выраженію для ускоренія въ прямолинейномъ движеніи

$$\frac{d^2x}{dt^2},$$

получимъ уравненіе движенія

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kx}{m}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0, \quad \ldots\ldots (101)$$

гдѣ величина дроби $\frac{k}{m}$ обозначена въ формѣ квадрата

$$n^2,$$

съ цѣлью отмѣтить, что эта величина положительная.

Уравненіе движенія (101) здѣсь оказывается однимъ изъ самыхъ простыхъ случаевъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Оно, какъ извѣстно, интегрируется при помощи тригонометрическихъ функцій.

Общій интегралъ этого уравненія долженъ содержать двѣ произвольныя постоянныя, такъ какъ уравненіе это втораго порядка. Этотъ интегралъ будетъ

$$x = a.\mathrm{Cos}\ (nt - \alpha) \ldots\ldots (101\ \mathrm{bis})$$

гдѣ a, α—произвольныя постоянныя. Не трудно провѣркой убѣдиться, что онъ удовлетворяетъ уравненію (101).

Скорость движенія будетъ:

$$\frac{dx}{dt} = -n.a.\mathrm{Sin}\ (nt - \alpha) \ldots\ldots (102)$$

Для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ нужно знать начальныя данныя движенія, т. е. величину отклоненія x, и скорости

$$\frac{dx}{dt}$$

нашей массы для того мгновенія, которое считаемъ началомъ времени. Примемъ за начальное положеніе то, при которомъ масса m находится на наибольшемъ удаленіи отъ центра; въ этомъ положеніи скорость движенія равна нулю; слѣд. форм. (102) должна дать, что при $t = o$ получится

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

т. е.

$$-na.\mathrm{Sin}\ (-\alpha) = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что произвольная постоянная α должна равняться нулю. Тогда для x получаемъ

$$x = a.\mathrm{Cos}nt \ldots\ldots (103).$$

и при $t = o$ имѣемъ

$$x = a$$

т. е. другая постоянная произвольная представляетъ наибольшее отклоненіе массы m отъ центра.

Изъ форм. (103) ясно, что движеніе массы m будетъ колебаніе около центра 0; масса будетъ уклоняться по объ стороны центра на величину

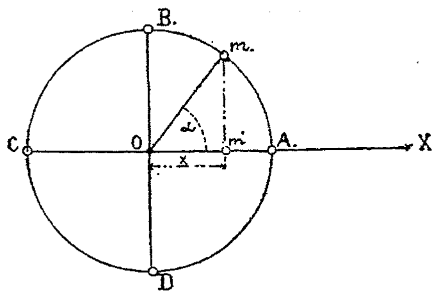
$$\pm a$$

т. е. 2a представляетъ амплитуду колебаній. Полный періодъ колебанія соотвѣтствуетъ полному періоду тригонометрической функціи, т. е. 2π. Называя время полнаго (двойнаго) колебанія черезъ T, получимъ:

$$nT = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103 \text{ bis}).$$

292. ***Геометрическій выводъ.*** Всѣ предъидущія формулы для гармоническаго движенія можно получить также и другимъ, элементарнымъ способомъ, основываясь на томъ замѣчаніи, что это движеніе можно разсматривать какъ проекцію равномѣрнаго движенія по кругу на діаметръ этого круга.



Фиг. 200.

Дѣйствительно, если масса m движется равномѣрно по кругу радіуса r (фиг. 200), то ускореніе движенія направлено къ центру и равно

$$\frac{v^2}{r}$$

(v—скорость движенія). Слѣд. сила, которая сообщаетъ такое движеніе, тоже направлена съ центру и равна

$$\frac{mv^2}{r}.$$

Проекція ея на діаметръ AC будетъ

$$\frac{mv^2}{r} \cdot \operatorname{Cos}\alpha = \frac{mv^2}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{mv^2}{r^2}x.$$

Эта проекція пропорціональна x, слѣд. законъ измѣненія силы такой же, какъ заданный для гармоническаго движенія. И такъ всѣ явленія гармоническаго движенія можно получить разсматривая проекцію круговаго равномѣрнаго движенія. Діаметръ круга представляетъ амплитуду колебанія; величина

$$\frac{mv^2}{r^2}$$

замѣняетъ коеффиціентъ k слѣд.

$$\frac{r}{v} = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (104).$$

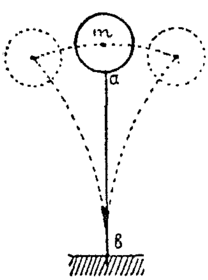
Время одного колебанія T будетъ равно времени круговаго оборота, т, е.

$$\frac{2\pi r}{v},$$

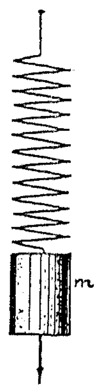
а это представляетъ по прежнему.

$$2\pi \,.\, \sqrt{\frac{m}{k}}$$

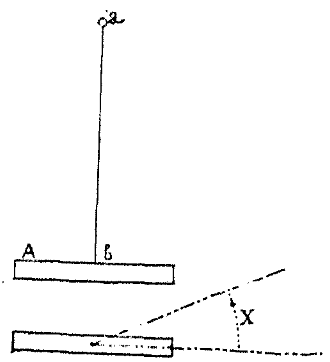
293. *Типъ гармоническаго колебанія* встрѣчается во множествѣ случаевъ движенія. Сюда относятся во первыхъ всѣ упругія колебанія системъ, имѣющихъ одну степень свободы.



Фиг. 201.



Фиг. 202.



Фиг. 203.

Напр. a) (фиг. 201) Масса m качается на упругой пружинѣ *ab* (массой пружины пренебрегаемъ).

b) (фиг. 202). Колебанія массы m на винтовой пружинѣ (опять пренебрегаемъ массой пружины).

c) Крутительныя колебанія тѣла A на проволокѣ *ab* (фиг. 203); тѣло вращается около оси *ab*, закручивая и раскручивая проволоку въ ту и другую сторону. Сопротивленіе проволоки крученію даетъ моментъ, стремящійся возстановить первоначальную форму; этотъ моментъ пропорціоналенъ углу закручиванія x; его назовемъ

$$kx;$$

онъ долженъ быть взять со знакомъ минусъ, такъ какъ направленъ противуположно увеличенію x.

Такъ какъ здѣсь имѣемъ вращательное движеніе около оси, то нужно написать, что моментъ силы

$$-k.x$$

уравновѣшиваетъ моментъ силъ инерціи; а этотъ послѣдній равенъ произведенію изъ угловаго ускоренія

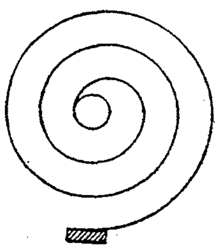
$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

на моментъ инерціи I нашего тѣла A относительно оси *). Такимъ образомъ получаемъ уравненіе движенія

$$I.\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104).$$

Оно согласуется съ (101); только теперь x представляетъ не линейное отклоненіе, а уголъ. Вмѣсто прежней массы m — теперь появился моментъ инерціи, который, какъ мы это видѣли уже нѣсколько разъ, во вращательномъ движеніи играетъ ту-же роль какъ масса при движеніи матеріальной точки и при поступательномъ движеніи твердаго тѣла.

d) Такое же уравненіе какъ (104) получимъ и для колебаній балансира карманныхъ часовъ (фиг. 204).



Фиг. 204.

e) Колебанія болѣе сложныхъ упругихъ системъ, имѣюшихъ **не одну**, а нѣсколько степеней свободы, могутъ быть подведены подъ тотъ же гармоническій типъ. Для этого нужно ввести такъ называемыя **нормальныя** колебанія **).

f) Колебанія маятника, при небольшихъ размахахъ его, тоже будутъ гармоническія. Возьмемъ сначала простой маятникъ (фиг. 205); точка 0 служитъ центромъ, къ которому тяжесть стремится вернуть массу m, подвѣшенную на нити. Здѣсь возвращающая сила есть та слагающая вѣса, которая направлена по касательной; она равна произведенію изъ вѣса p качающейся точки на синусъ угла отклоненія. При малыхъ отклоненіяхъ,

*) Мы пренебрегаемъ массой самой скручиваемой проволоки.

**) См. Lord Rayleigh. Theory of Sound.

синусъ можно замѣнить угломъ; тогда сила по касательной равна:

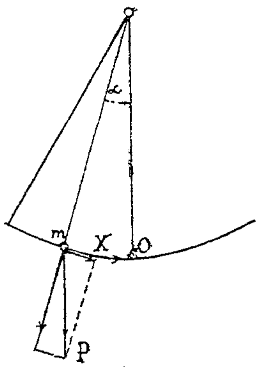
$$p \cdot \alpha.$$

Она пропорціональна углу α, т. е. пропорціональна отклоненію

$$Om,$$

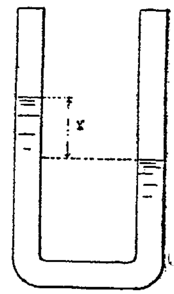
которое назовемъ x, а силу означимъ

$$kx.$$



Фиг. 205.

Фиг. 206.



Фиг. 207.

Ускореніе по касательной получится дѣля силу на массу m; его нужно взять съ минусомъ, такъ какъ сила идетъ противуположно направленію увеличенія x. И такъ это ускореніе будетъ

$$-\frac{kx}{m};$$

но мы имѣемъ общее выраженіе для ускоренія по касательной въ криволинейномъ движеніи

$$\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Уравнивая эти два выраженія получаемъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

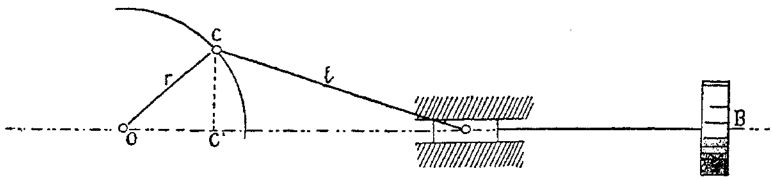
Это уравненіе согласно съ (101); но здѣсь движеніе не прямолинейное, а криволинейное, и x не прямолинейный отрѣзокъ, а дуга.

g) Что касается сложнаго маятника, то мы уже знаемъ какъ подвести его движеніе подъ типъ простаго маятника (n° 65).

h) Небольшія колебанія судовъ на спокойной поверхности моря (фиг. 206) также подходятъ подъ гармоническій типъ.

i) Наконецъ укажемъ на тѣ колебанія столба воды въ сообщающихся сосудахъ (фиг. 207), которыя произойдутъ при нарушенiи равновѣсiя. Если пренебрежемъ тренiемъ, то малыя колебанiя будутъ гармоническiя. Этотъ вопросъ разсматривается Ньютономъ въ Principia, съ приложенiемъ къ волнообразному движенiю.

294. *Гармоническое движенiе въ машинахъ.* Очень распространено слѣдующее преобразованiе движенiя, называемое кривошипнымъ механизмомъ (фиг. 209). Кривошипъ r вращается



Фиг. 209.

равномѣрно около центра 0, и посредствомъ шатуна l сообщаетъ прямолинейное попеременное движенiе ползуну и соединенному съ нимъ тѣлу В. Это прямолинейное движенiе приблизительно можно считать гармоническимъ. Сходство получается очень близкое если длина шатуна l въ 5 и болѣе разъ превышаетъ длину кривошипа; тогда движенiе ползуна очень мало отличается отъ движенiя точки C', т. е. проекцiи пуговки кривошипа С, а мы видѣли, что проекцiя C' имѣетъ гармоническое движенiе.

Кривошипный механизмъ примѣняется въ паровыхъ, газовыхъ машинахъ, насосахъ и т. д., какъ для поршней, такъ и для золотниковъ.

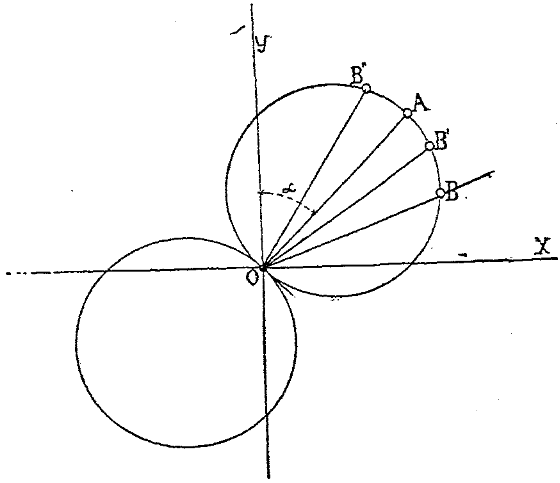
295. Популярное построенiе, называемое дiаграммой Цейнера, служащее для изображенiя движенiя золотника, есть ничто иное какъ построенiе гармоническаго движенiя, а именно формулы:

$$x = a.\ \mathrm{Cos}\ (nt - \alpha)$$

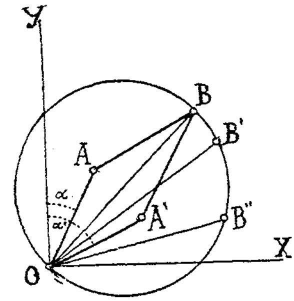
Оно состоитъ въ слѣдующемъ (фиг. 210): откладываемъ уголъ YOA равный α, и на лучѣ OA засѣкаемъ отрѣзокъ OA равный a. Затѣмъ строимъ кругъ на OA какъ на дiаметрѣ. Величины nt представляются углами образуемыми перемѣнными лучами OB, OB$'$, OB$''$ съ осью OY. Такъ какъ уголъ OBA вписанъ надъ дiаметромъ, то онъ прямой; слѣд.

$$OB = OA.\ \mathrm{Cos}\, AOB =$$
$$= a.\ \mathrm{Cos}\ (nt - \alpha).$$

И такъ величины x представляются хордами OB, OB′, OB″ . . . нашей діаграммы *).



Фиг. 210.



Фиг. 211.

295. Часто примѣняются **двойные золотники**; каждый изъ нихъ движется особымъ кривошипнымъ механизмомъ, слѣд. они получаютъ перемѣщенія:

$$x = a. \operatorname{Cos}(nt - \alpha)$$
$$x_1 = a_1 \operatorname{Cos}(nt - \alpha').$$

Одинъ золотникъ скользитъ по другому, и **относительное** перемѣщеніе ихъ опредѣляетъ открываніе и закрываніе окошекъ, впускающихъ и выпускающихъ паръ. Для нахожденія такого относительнаго перемѣщенія, нужно знать сумму или разность перемѣщеній

$$x + x_1 \text{ или } x - x_1.$$

Цейнеръ далъ пріемъ для построенія этихъ величинъ; результатъ такого движенія, вызываемаго двумя кривошипными механизмами, онъ изображаетъ помощью одного, фиктивнаго кривошипнаго механизма, для котораго строитъ діаграмму, по прежнему правилу. Чтобы получить сумму

$$x + x_1,$$

*) Таже діаграмма можетъ представить величины функціи

$$a. \operatorname{Sin}(nt + \alpha);$$

для этого послужатъ тѣже лучи OB, OB′ . . . , но углы nt придется отсчитывать отъ оси OX въ сторону противную движенію часовой стрѣлки.

нужно поступить слѣдующимъ образомъ (фиг. 211): откладываемъ уголъ $YOA = \alpha$ и длину $OA = a$; Тоже дѣлаемъ и для другого механизма; для него уголъ $YOA' = \alpha'$, и длина $OA' = a_1$. Затѣмъ строимъ параллелограммъ на сторонахъ OA и OA′. Получаемъ *діагональ параллелограмма OB, на которой какъ на* діаметрѣ нужно построить кругъ. Хорды OB″, OB′, OB этого круга даютъ искомыя величины

$$x + x_1.$$

Очевидно это построеніе есть ничто иное какъ извѣстное и постоянно примѣняемое въ Теоріи Свѣта построеніе Френеля для сложенія двухъ гармоническихъ колебаній различающихся амплитудами

$$a,\ a_1$$

и фазами

$$\alpha,\ \alpha'.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что въ двухъ совершенно различныхъ областяхъ науки примѣняются одинаковыя построенія. Такое сходство рѣшеній вызывается тѣмъ обстоятельствомъ, что и въ Теоріи Свѣта и въ кривошипномъ механизмѣ мы имѣемъ дѣло съ гармоническимъ колебаніемъ.

Вотъ еще одна аналогія между рѣшеніями относящимися къ Прикладной Механикѣ и выводами Оптики. Толле (Die Regelung der Kraftmaschinen. s. 199) указываетъ, что силы инерціи пароваго поршня, движущагося гармонически взадъ и впередъ, могутъ быть уравновѣшены центробѣжными силами двухъ равныхъ массъ, которыя вращаются равномѣрно съ одинаковыми скоростями, но по противуположнымъ направленіямъ. Это рѣшеніе тождественно копируетъ слѣдующую модель изъ Теоріи Свѣта: лучъ свѣта, поляризованный прямолинейно, эквивалентенъ двумъ лучамъ, имѣющимъ круговую поляризацію, у которыхъ направленія вращенія противуположны. Такая модель была предложена Френелемъ въ качествѣ гипотезы, которая очень остроумно объясняетъ явленія вращенія плоскости поляризаціи, замѣчаемыя при прохожденіи свѣта черезъ кварцъ и нѣкоторые другіе кристаллы.

296. ***Четвертый типъ. Колебанія, когда дѣйствуетъ треніе, пропорціональное скорости.*** Возьмемъ гармоническое движеніе, разобранное въ n° 291, и дополнимъ его тѣмъ, что кромѣ силы

$$-kx,$$

стремящейся вернуть точку m въ центръ O, введемъ еще треніе, величина котораго пропорціональна величинѣ скорости. Сопротивленіе, называемое треніемъ, всегда направлено противуположно скорости. Поэтому сила этого рода можетъ быть представлена въ уравненіи движенія членомъ, имѣющимъ форму

$$-h\frac{dx}{dt}$$

гдѣ h—постоянный коеффиціентъ, а множитель

$$-\frac{dx}{dt}$$

изображаетъ величину всегда равную и противуположную скорости. Ускореніе, вызываемое треніемъ, найдется дѣля силу на массу m, и будетъ

$$-\frac{h}{m}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Уравненіе движенія будетъ отличаться отъ (101) этимъ дополнительнымъ членомъ. Мы получимъ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\kappa}{m}x-\frac{h}{m}\cdot\frac{dx}{dt}\quad\ldots(105)$$

По прежнему означимъ

$$\frac{\kappa}{m}\text{ черезъ }n^2;$$

а для означенія частнаго

$$\frac{h}{m}$$

введемъ букву f. Получимъ слѣдующее уравненіе движенія:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f\frac{dx}{dt}+n^2x=0\ .\ .\ .\ (106).$$

Оно также какъ и прежнее (101) относится къ разряду линейныхъ дифференціальныхъ уравненій и интегрируется при помощи давно извѣстныхъ пріемовъ.

Мы прямо приведемъ интегралъ этого уравненія; правильность его желающіе могутъ провѣрить подстановкой въ (106); общность же рѣшенія указывается тѣмъ, что интегралъ содержитъ двѣ произвольныя постоянныя.

Найдемъ величину

$$\sqrt{n^2-\frac{1}{4}f^2}.$$

которую обозначимъ черезъ n'. Обыкновенно сила тренія не велика, и величина $^1/_4$ f^2 значительно меньше чѣмъ n^2. Тогда радикалъ, обозначенный буквою n', вещественный. Разсмотримъ этотъ случай; для него мы имѣемъ рѣшеніе

$$x = a \, . \, e^{-{}^1/_2 ft} \, . \, \mathrm{Cos}\, (n't - \alpha).$$

Это рѣшеніе отличается отъ (101 bis), полученнаго при отсутствіи тренія, только тѣмъ, что вмѣсто постоянной амплитуды a появился множитель

$$ae^{-{}^1/_2 ft},$$

постепенно убывающій съ теченіемъ времени. Слѣд. это движеніе можно разсматривать, какъ періодическое колебаніе, съ постепенно уменьшающейся амплитудой; колебанія понемногу тухнутъ вслѣдствіе тренія. Періодъ колебаній по прежнему опредѣляется періодомъ косинуса, слѣд. время двойнаго колебанія получится изъ (103 bis), замѣняя букву n величиной n'. И такъ періодъ будетъ:

$$T' = \frac{2\pi}{n'}.$$

Въ большинствѣ случаевъ, съ которыми приходится имѣть дѣло, треніе не велико, и значеніе n', которое равно

$$\sqrt{n^2 - {}^1/_4 f^2},$$

очень мало отличается отъ n. Тогда мы можемъ принять, что періодъ T' равенъ

$$\frac{2\pi}{n},$$

т. е. треніе неизмѣняетъ періода колебаній.

Случай когда треніе на столько велико, что n' дѣлается мнимымъ, мы не будемъ разбирать.

297. Разсмотрѣнный типъ представляетъ явленія многихъ колебательныхъ движеній.

a) Сюда относятся колебанія маятника, который встрѣчаетъ при своемъ движеніи сопротивленіе отъ воздуха.

b) Сюда относятся различныя упругія и другія колебанія, упомянутыя въ n° 293; тамъ мы предполагали отсутствіе тренія и другихъ сопротивленій, но въ дѣйствительности такія сопротивленія всегда будутъ, а потому колебанія постепенно затухаютъ.

c) Тѣже уравненія представляютъ колебанія магнитной стрѣлки въ обыкновенномъ гальванометрѣ, или колебанія подвижной рамки съ обмоткой въ гальванометрѣ Депре́-Дарсонваля и т. п. колебанія въ приборахъ для электрическихъ измѣреній. Здѣсь является треніе воздуха, и сопротивленіе представляемое тушителемъ колебаній (демпферомъ); обѣ эти силы пропорціональны скорости. Возьмемъ напр. гальванометръ Депре-Дарсонваля. Рамка при колебаніяхъ поворачивается около вертикальной оси; уголъ поворота отъ положенія равновѣсія назовемъ x, угловая скорость будетъ

$$\frac{dx}{dt}$$

а угловое ускореніе

$$\frac{d^2x}{dt^2}.$$

На рамку дѣйствуетъ сила, стремящаяся установить ее въ равновѣсномъ положеніи; эта сила пропорціональна углу x; ея моментъ обозначимъ kx. Сопротивленіе воздуха и сопротивленіе вслѣдствіе токовъ, индуктирующихся при колебаніи въ магнитномъ полѣ прибора, оба пропорціональны угловой скорости; величины моментовъ этихъ силъ назовемъ

$$f\frac{dx}{dt} \text{ и } g\frac{dx}{dt}.$$

Наконецъ моментъ силъ инерціи, получающихся при вращеніи, равенъ произведенію изъ угловаго ускоренія на моментъ инерціи вращающагося тѣла, т. е.

$$I.\frac{d^2x}{dt^2}.$$

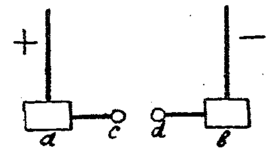
Принимая во вниманіе направленіе этихъ моментовъ, получимъ уравненіе движенія

$$I\frac{d^2x}{dt^2}+(f+g)\frac{dx}{dt}+kx=0$$

т. е. прежній типъ.

298. *Электрическія колебанія,* т. е. колебательный разрядъ конденсатора. Всѣмъ извѣстно какое особое значеніе получило въ Физикѣ это явленіе, вслѣдствіе работъ Герца и его

продолжателей. Пусть a, b (фиг. 212) конденсаторы, заряжаемые перемѣннымъ токомъ вторичной спирали индукціонной катушки; колебательный разрядъ получается въ видѣ искръ между шариками c, d. Назовемъ перемѣнный зарядъ конденсатора буквою Q, емкость конденсатора C, сопротивленіе цѣпи R и ея самоиндукцію L. Тогда измѣненіе заряда Q съ теченіемъ времени изображается уравненіемъ В. Томсона:



Фиг. 212.

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

т. е. совершенно согласуется съ нашимъ типомъ затухающихъ колебаній. Если представимъ уравненіе (105) въ видѣ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

то сравнивая его съ (107) видимъ, что сопротивленіе цѣпи R соотвѣтствуетъ тренію h, а самоиндукція цѣпи L отвѣчаетъ массѣ m. Это соотвѣтствіе согласуется съ обыкновенными гипотетическими взглядами на явленія тока. На сопротивленіе цѣпи всегда смотрятъ какъ на родъ тренія, какъ на нѣчто похожее на треніе жидкости текущей по трубѣ. Явленія же самоиндукціи постоянно разсматриваются какъ родъ инерціи, и потому величина

$$-L\frac{d^2Q}{dt^2}$$

аналогична члену

$$-m\,.\frac{d^2x}{dt^2},$$

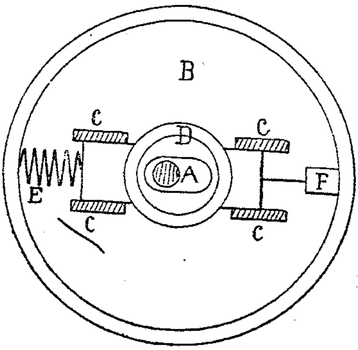
представляющему силу инерціи массы m.

299. *Колебанія регуляторовъ паровыхъ машинъ.* Если мы разсмотримъ собственныя колебанія такого регулятора *), то придемъ къ тому же типу затухающихъ колебаній. Чтобы не усложнять вопросъ обстоятельствами, происходящими вслѣдствіе большей или меньшей сложности конструкціи регулятора, мы возьмемъ самый простой регуляторъ, а именно регуляторъ Штрнада. Это одна изъ болѣе новыхъ конструкцій;

*) Т. е. колебанія регулятора отцѣпленнаго отъ регулирующаго прибора

судя по имѣющимся въ литературѣ даннымъ, регуляторъ этотъ дѣйствуетъ хорошо.

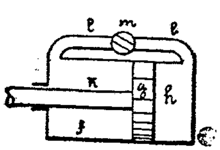
Онъ относится къ разряду маховичныхъ регуляторовъ, т. е. вращается рядомъ съ маховикомъ на главномъ валу машины. Схема (фиг. 213) изображаетъ этотъ валъ A, и заклиненное на немъ колесо B. На послѣднемъ расположенъ регуляторъ D, который вращается вмѣстѣ съ колесомъ, и можетъ кромѣ того скользить по діаметру колеса, направляясь особыми выступами C, C отлитыми за одно цѣлое съ колесомъ B. Регулирующимъ приборомъ служитъ эксцентрикъ D; регулированіе состоитъ въ томъ, что увеличивается или уменьшается эксцентриситетъ этого эксцентрина, относительно оси вала A; при



Фиг. 213.

измѣненіи эксцентриситета измѣняется ходъ золотника, распредѣляющаго паръ, и тѣмъ усиливается или ослабляется дѣйствіе пара въ машинѣ.

Дѣйствіе регулятора заключается въ слѣдующемъ: центробѣжная сила скользящаго регулятора отбрасываетъ его по діаметру колеса B; этому сопротивляется пружина E, которая стремится вернуть скользящую часть въ ея среднее, центральное положеніе; давленіе пружины пропорціонально отклоненію регулятора отъ его центральнаго положенія. Для быстраго тушенія колебаній, введенъ катарактъ F; этотъ небольшой приборъ, изображенный съ бòльшими подробностями отдѣльно на фиг. 214, назначенъ для произведенія тренія, пропорціональнаго скорости движенія; для этого нужно ввести треніе жидкости. Катарактъ состоитъ изъ цилиндра f наполненнаго масломъ, съ поршнемъ g; сообщеніе полостей, приходящихся съ двухъ сторонъ поршня, производится трубочкой ll съ краномъ m. Масло, проходя со стороны h на сторону k, испытываетъ треніе въ трубкѣ ll, и въ кранѣ m, который можно прикрывать болѣе или менѣе для измѣненія тренія; это сопротивленіе можно считать пропорціональнымъ скорости.



Фиг. 214.

Разсмотримъ относительное движеніе скользящаго регулятора по діаметру колеса для случая равномѣрнаго вращенія вала А. Это будетъ прямолинейное поступательное движеніе нѣкоторой массы m. На нее дѣйствуютъ слѣдующія силы: a) центробѣжная сила и упругость пружины Е; обѣ онѣ пропорціональны величинѣ отклоненія x центра тяжести регулятора отъ центра вала x; совокупность ихъ можетъ быть изображена одной силой пропорціональной отклоненію x, и стремящейся вернуть регуляторъ въ его центральное положеніе *). b) треніе, вызываемое катарактомъ; оно пропорціонально скорости скользящаго движенія, т. е. производной отклоненія x

$$\frac{dx}{dt}.$$

И такъ здѣсь имѣются всѣ черты того типа затухающихъ колебаній, который мы разсматриваемъ, и мы получаемъ прежнее уравненіе:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+k\,x=o\quad . \;\; . \;\; . \;\; (108)$$

300. *Замѣчаніе по поводу тренія регуляторовъ.* Въ приведенной нами конструкціи регулятора имѣется катарактъ, вызывающій треніе жидкости, которое пропорціонально скорости движенія. Мы уже видѣли что дѣйствіе этого тренія изображается членомъ

$$-\,h\frac{dx}{dt},$$

который изображаетъ силу всегда направленную въ сторону противуположную скорости

$$\frac{dx}{dt},$$

т. е. силу, всегда противуположную движенію.

Катарактъ своимъ треніемъ быстро тушитъ колебанія, и потому часто настоятельно рекомендуютъ примѣненіе его въ регулирующихъ приборахъ. Но присутствіе его не абсолютно необходимо; и безъ катаракта имѣется треніе частей регулирующаго прибора, которое тоже способствуетъ тушенію колебаній; поэтому нерѣдки регуляторы безъ катарактовъ. Съ динамической точки зрѣнія они отличаются отъ предъидущаго тѣмъ, что

*) Коріолисова сила перпендикулярна къ направленію разсматриваемаго движенія и потому не входитъ въ уравненіе. Мы пренебегаемъ тѣмъ треніемъ, которое вызывается этой силой.

въ нихъ треніе не будетъ пропорціонально скорости; при плохой смазкѣ частей регулятора, это будетъ треніе твердыхъ тѣлъ, которое отъ скорости почти не зависитъ, и можетъ считаться постояннымъ. Это постоянное треніе нужно ввести въ уравненіе (108) вмѣсто члена

$$h\frac{dx}{dt}.$$

Но здѣсь необходимо озаботиться, чтобы вводимая въ уравненіе сила тренія всегда шла противоложно движенію. Когда происходитъ та часть колебанія, при которой x увеличивается, то треніе должно идти въ сторону уменьшенія, т. е. треніе идетъ въ ту же сторону, какъ и сила

$$k\,x,$$

стремящаяся вернуть колеблящееся тѣло въ его центральное положеніе. Называя величину тренія буквою f, получимъ уравненіе движенія:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+f+kx=o\ .\ .\ .\ (109)$$

Но разсмотримъ теперь ту часть колебанія, когда масса m приближается къ своему центральному положенію т. е. когда x уменьшается; тогда треніе, какъ противуположное движенію, идетъ въ сторону увеличенія x, т. е. оно противуположно силѣ

$$k\,x,$$

стремящейся вернуть массу въ ея центральное положеніе. Поэтому уравненіе движенія будетъ

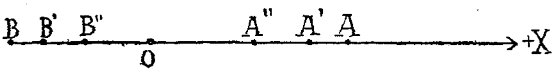
$$m.\frac{d^2x}{dt^2}-f+kx=o\ .\ .\ .\ (110)$$

оно отличается отъ (109) знакомъ члена f.

301. Оказывается, что въ случаѣ постоянной величины тренія, мы имѣемъ дѣло съ разрывной величиной, которая, при перемѣнѣ направленія движенія, сразу мѣняетъ свою величину съ + f на — f. Вслѣдствіе такого разрыва нельзя составить одно уравненіе, которое непрерывно представляетъ всѣ явленія колебаній. Приходится имѣть дѣло съ двумя различными уравненіями (109) и (110), изъ которыхъ одно относится къ части колебанія когда движеніе идетъ въ сторону увеличенія x, а другое нужно примѣнять для той части колебанія, когда движенія направлено въ сторону уменьшенія x. Имѣя два разныхъ

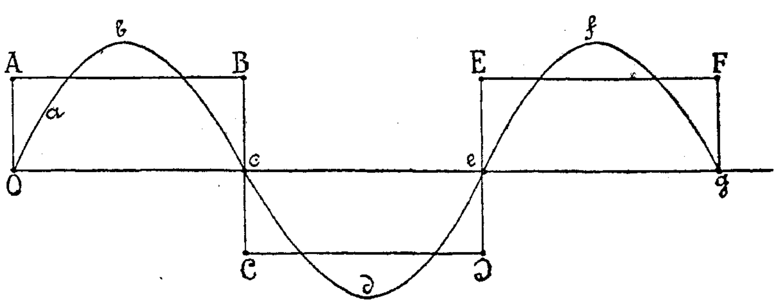
уравненія, получаемъ два различныхъ интеграла, каждый съ двумя произвольными постоянными. Это значительно усложняетъ вопросъ; теперь нельзя получить общее аналитическое рѣшеніе, дающее величину перемѣщенія x для всего времени движенія, до полнаго затуханія колебаній. Приходится разсматривать послѣдовательно и особо каждое отдѣльное одиночное колебаніе, и для каждаго изъ нихъ особо опредѣлять произвольныя постоянныя.

Пусть (фиг. 215) O означаетъ среднее, центральное положеніе колеблящейся точки. Начинаемъ съ крайняго положенія A и



Фиг. 215.

разсматриваемъ часть колебанія AB; къ ней примѣнимо уравненіе (109); нужно взять интегралъ его, и опредѣлить произвольныя постоянныя изъ данныхъ относящихся къ точкѣ A. т. е. изъ условій, что здѣсь скорость равна нулю, а величина x равна амплитудѣ OA. Затѣмъ разбираемъ размахъ BA′; здѣсь при движеніи увеличивается x, слѣд. нужно взять уравненіе (110); произвольныя постоянныя его опредѣлятся по даннымъ относящимся къ точкѣ B. Далѣе разбираемъ размахъ A′ B′; къ нему примѣнимо уравненіе (109); произвольныя постоянныя интеграла нужно опредѣлить вновь, по даннымъ, относящимся къ точкѣ A′. Потомъ разбираемъ слѣдующій размахъ B′ A″ и т. д.



Фиг. 216.

Такое усложненіе, вызываемое тѣмъ, что треніе не представляется непрерывной функціей, очень затрудняетъ рѣшеніе, а потому часто для облегченія прибѣгаютъ къ приблизительному разсмотрѣнію, состоящему въ томъ, что разрывную величину замѣняютъ непрерывной. Такая замѣна представлена графически на фиг. 216; вмѣсто функціи, которая графически изображается разрывной линіей AB CD EF, можно ввести непрерывную кривую O *abcdefg*.

Въ вопросахъ о треніи постоянное треніе

$$\pm f$$

часто замѣняютъ треніемъ пропорціональнымъ скорости, т. е.

$$h\frac{dx}{dt},$$

подбирая величину h такъ, чтобы это треніе въ среднемъ какъ можно меньше отличалось отъ f. Такая замѣна въ регуляторахъ и другихъ машинахъ допустима, въ особенности при тщательной, обильной смазкѣ, которая не только уменьшаетъ величину тренія, но сверхъ того приближаетъ характеръ этой силы къ тренію жидкихъ тѣлъ, т. е. къ закону пропорціональности первой степени скорости.

Всѣ эти замѣчанія о введеніи тренія въ уравненія движенія имѣютъ общее значеніе и относятся не только къ регуляторамъ, но и ко многимъ другимъ механизмамъ и физическимъ приборамъ въ которыхъ, при колебательномъ движеніи, дѣйствуетъ треніе.

302. *Историческая замѣтка.* Въ первыхъ работахъ относительно колебанія регуляторовъ паровыхъ машинъ не было обращено вниманіе на то, что въ случаѣ постояннаго тренія мы имѣемъ разрывную величину, откуда слѣдуетъ необходимость разсматривать каждый размахъ колебанія отдѣльно и пользоваться двумя различными уравненіями (109) и (110). Оба эти уравненія соединяли въ одно, и писали ихъ въ формѣ:

$$m\frac{d^2x}{df^2} \pm f + kx + z\,{}^{*}) = 0 \quad . \quad . \quad . \; (111)$$

Затѣмъ по ходу вывода требовалось найти третью производную

$$\frac{d^3x}{dt^3}$$

для подстановки ея въ другое уравненіе вопроса (въ уравненіе живыхъ силъ главнаго вала машины съ маховикомъ). Для на-

---

*) Здѣсь мы знакомъ z обозначили дополнительные члены, входящіе въ тѣхъ случаяхъ, когда разсматриваются болѣе сложные случаи дѣйствія регулятора, чѣмъ разобранный нами.

хожденія этой величины дифференцировали уравненіе (111), причемъ ошибочно предполагали, что производная члена

$$\pm f,$$

какъ производная постоянной величины, будетъ нулемъ. Этимъ путемъ треніе совершенно исключалось и не попадало въ окончательное уравненіе.

Одинъ изъ важныхъ выводовъ этой теоріи состоялъ въ томъ, что регуляторы, въ которыхъ дѣйствуетъ только постоянное треніе, неустойчивы, т. е. при измѣненіяхъ движущей силы получаютъ значительные размахи, постепенно увеличивающіеся. Между тѣмъ для правильнаго дѣйствія регулятора необходимо, чтобы начавшіеся колебанія быстро потухали. Теорія указывала, что такое потуханіе происходитъ, если треніе пропорціонально скорости, т. е. имѣетъ характеръ тренія жидкости. Отсюда выводилось заключеніе: Для устойчивости регулятора необходимъ катарактъ.

Этотъ результатъ вызвалъ возраженія со стороны практическихъ инженеровъ; они указывали на существующіе примѣры регуляторовъ, которые оказывались устойчивыми, хотя не имѣли катаракта. Нѣкоторые на этомъ основаніи совсѣмъ отрицали правильность указанной теоріи регуляторовъ.

Теперь мы знаемъ, что эта теорія была вполнѣ вѣрна въ своихъ основаніяхъ и сохраняетъ свое значеніе и въ настоящее время. Единственный недосмотръ ея состоялъ въ исключеніи члена:

$$\pm f$$

при дифференцированіи уравненія (111); при этомъ треніе вовсе какъ бы не существуетъ, и безъ сомнѣнія регуляторъ безъ тренія получается неустойчивымъ, такъ какъ нѣтъ силы, которая тушитъ колебанія.

Конечно такое исключеніе члена

$$\pm f,$$

помощью дифференцированія, математически неправильно; этотъ членъ не есть постоянная величина, а разрывная функція. При существованіи такого тренія вопросъ не можетъ быть разрѣшенъ также, какъ въ случаѣ непрерывныхъ функцій; мы уже показали, что въ случаѣ постояннаго тренія необходимо разсматривать отдѣльно каждый размахъ колебанія.

303. *Пятый типъ. Принужденныя (насильственныя колебанія).* Опять будемъ разсматривать прямолинейное

колебательное движеніе матеріальной точки, но введемъ еще дальнѣйшее усложненіе. Кромѣ силъ

$$\text{a) силы} - kx,$$

стремящейся всегда вернуть точку m въ ея центральное положеніе, и

b) тренія пропорціональнаго скорости

$$-h\,\frac{dx}{dt}\;,$$

введемъ еще одну внѣшнюю силу, идущую, также какъ и прочія силы, по линіи движенія массы m. Пусть эта новая сила будетъ перемѣнная, гармоническаго типа, т. е. значеніе ея опредѣляется тригонометрической формулой

$$E\,.\cos pt$$

гдѣ E, p постоянныя величины. Такая сила измѣняется въ предѣлахъ

$$\pm E,$$

и періодъ ея полнаго колебанія опредѣляется періодомъ косинуса. Называя этотъ періодъ буквою T_1, получимъ

$$p\,T_1 = 2\pi\,;\; T_1 = \frac{2\pi}{p}\,.$$

Посмотримъ какое будетъ движеніе точки m подъ дѣйствіемъ такой періодической силы. Сила инерціи матеріальной точки будетъ какъ прежде

$$-\,m\,\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Складывая всѣ силы, въ томъ числѣ и силу инерціи, и приравнивая сумму нулю, получимъ уравненіе движенія:

$$-\,m\;\frac{d^2x}{dt^2}\;-kx - h\;\frac{dx}{dt}\;+E\,\mathrm{Cos}\;pt = 0$$

Дѣля на m, и вводя обозначенія

$$\frac{k}{m} = n^2\,;\;\frac{h}{m} = f\,;\;\frac{E}{m} = \mathscr{E}$$

получимъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\cdot\;\frac{dx}{dt} + n^2\,x = \mathscr{E}.\,\mathrm{Cos}\;pt \;.\;.\;.\;.\;.\;(112)$$

Опять имѣемъ линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка, но теперь это уравненіе содержитъ въ правой части своей, вмѣсто нуля, величину

$$\mathcal{E}.\ \mathrm{Cos}\ pt.$$

Такія уравненія интегрируются при помощи давно извѣстныхъ, общихъ пріемовъ.

Если мы найдемъ одно какое нибудь частное рѣшеніе x_1 этого уравненія, т. е. такую функцію времени, которая удовлетворяетъ уравненію (112), то общій интегралъ получится, прикладывая къ x_1 выраженіе общаго интеграла слѣдующаго уравненія

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + n^2x = o\ .\ .\ (113),$$

которое отличается отъ заданнаго (112) только тѣмъ, что въ правой части его, вмѣсто періодической силы, стоитъ нуль. Мы знакомы съ этимъ уравненіемъ (113); знаемъ, что оно представляетъ свободныя потухающія колебанія точки m, и получили уже общій интегралъ этого уравненія. Теперь для нашего новаго вопроса нужно прежній общій интегралъ приложить къ x_1.

На этотъ результатъ нужно смотрѣть слѣд. образомъ: x_1 означаетъ движеніе, сообщаемое періодической силой E. Cospt, а кромѣ того къ этому движенію присоединяются свободныя колебанія, которыя происходили бы въ случаѣ отсутствія періодической силы; эти послѣднія колебанія понемногу затухаютъ.

Такъ какъ мы вполнѣ изучили свободныя колебанія, то остается найти функцію названную нами x_1, т. е. частный интегралъ, удовлетворяющій уравненію (112). Значеніе x_1 легко находится; попробуемъ для этой функціи тригонометрическую форму:

$$x_1 = a\,\mathrm{Cos}\,(pt - \varepsilon)$$

(a и ε — постоянныя). Подстановка въ (112) даетъ результатъ

$$a\,(n^2 - p^2)\,\mathrm{Cos}\,(pt - \varepsilon) - fp.\ a\,\mathrm{Sin}\,(pt - \varepsilon) = \mathcal{E}.\ \mathrm{Cos}\,pt.\ .\ .\ .\ (114).$$

Но мы можемъ сдѣлать слѣдующую замѣну:

$$\mathrm{Cos}\,pt = \mathrm{Cos}\,(pt - \varepsilon + \varepsilon) =$$
$$= \mathrm{Cos}\,\varepsilon.\ \mathrm{Cos}\,(pt - \varepsilon) - \mathrm{Sin}\,\varepsilon.\ \mathrm{Sin}\,(pt - \varepsilon).$$

Вставимъ такое преобразованіе Cospt во вторую часть уравненія (114). Тогда всѣ члены его могутъ быть раздѣлены на двѣ группы: члены первой группы имѣютъ общій множитель

$$\operatorname{Cos}(pt - \varepsilon),$$

а члены второй группы имѣютъ общій множитель

$$\operatorname{Sin}(pt - \varepsilon).$$

Первая группа будетъ:

$$[a(n^2 - p^2) - \mathscr{E}. \cos\varepsilon]. \operatorname{Cos}(pt - \varepsilon),$$

а вторая группа:

$$(\mathscr{E}. \operatorname{Sin}\varepsilon - fpa). \operatorname{Sin}(pt - \varepsilon).$$

Для того, чтобы уравненіе (114) удовлетворялось при всякомъ t, первая и вторая группы должны, каждая отдѣльно, обращаться въ нуль. Это условіе влечетъ за собою слѣдующіе два равенства:

$$a(n^2 - p^2) - \mathscr{E}. \cos\varepsilon = o \text{ или } a(n^2 - p^2) = \mathscr{E}. \cos\varepsilon$$
$$fp. a - \mathscr{E}. \operatorname{Sin}\varepsilon = o \text{ или } fp\,a = \mathscr{E}. \operatorname{Sin}\varepsilon.$$

Изъ нихъ получаемъ величины неизвѣстныхъ a и ε, входящихъ въ выраженіе x_1. Для этого дѣлимъ второе уравненіе на первое, получимъ

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{fp}{n^2 - p^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (115)$$

Затѣмъ, найдя ε, получаемъ изъ втораго уравненія

$$a = \frac{\mathscr{E} \operatorname{Sin}\varepsilon}{pf} \;..\text{-}(116),$$

Слѣд. значеніе x_1 будетъ:

$$x_1 = \frac{\mathscr{E}. \operatorname{Sin}\varepsilon}{pf}. \operatorname{Cos}(pt - \varepsilon)$$

Это періодическая функція, слѣд. x_1 представляетъ колебательное періодическое движеніе, оно называется п р и н у ж д е н н ы м. или н а с и л ь с т в е н н ы м ъ к о л е б а н і е м ъ, производимымъ силой

$$P = E. \operatorname{Cos}pt.$$

304. Періодъ принужденнаго колебанія опредѣляется ве-

личиною p, слѣд. онъ одинаковъ съ періодомъ силы P, и время полнаго (двойного) колебанія будетъ

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}.$$

Но мы замѣчаемъ, что въ выраженіи для x_1 косинусъ берется отъ угла

$$pt - \varepsilon,$$

между тѣмъ какъ сила P содержитъ косинусъ отъ

$$p\,t$$

И такъ здѣсь имѣемъ разность фазъ, измѣряемую угломъ ε; колебанія x_1 отстаютъ на ε отъ колебаній силы P.

Величина ε положительная если

$$n > p$$

т. е. когда время одного колебанія силы P

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}$$

больше чѣмъ величина

$$T = \frac{2\pi}{n},$$

которая представляетъ время колебанія нашей точки m, когда она колеблется свободно, безъ принужденія. Въ этомъ случаѣ колебанія x_1 дѣйствительно отстаютъ отъ колебаній силы P.

Если же имѣемъ случай

$$n < p, \text{ т. е. } T_1 < T$$

то ε отрицательное, т. е. происходитъ не запаздываніе, а опереженіе. Колебаніе x_1 опережаетъ измѣненія силы P.

305. ***Накопленіе колебаній*** (резонансъ). Особый, замѣчательный случай получается когда имѣемъ

$$p = n$$

т. е. если періодъ силы P одинаковъ съ періодомъ свободныхъ колебаній нашей точки m.

Тогда имѣемъ изъ (115)

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \infty$$

т. е. разность фазъ ε равна

$$\frac{\pi}{2}$$

При этомъ получаемъ

$$\operatorname{Sin} \varepsilon = 1$$

а изъ общей формулы (116)

$$a = \frac{\mathscr{E} \operatorname{Sin} \varepsilon}{pf}$$

получаемъ, что въ этомъ случаѣ амплитуда a получитъ свою наибольшую величину

$$a = \frac{\mathscr{E}}{pf}.$$

Это случай резонанса, когда даже небольшая періодическая сила можетъ сообщить колебанія со значительной амплитудой. Резонансъ получается когда періодъ силы, производящей насильственныя колебанія, одинаковъ съ періодомъ свободныхъ колебаній.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что при резонансѣ разность фазъ между движеніемъ точки m и измѣненіемъ силы P всегда равна

$$\frac{\pi}{2}$$

т. е. представляетъ четверть полнаго (двойнаго) колебанія.

306. *Случай когда дѣйствуетъ нѣсколько періодическихъ силъ.* Пусть этихъ силъ нѣсколько, и всѣ онѣ имѣютъ гармоническій характеръ, т. е. перемѣнныя ихъ величины изображаются формулами вида

$$P = E.\operatorname{Cos}(pt - \alpha)$$

при различныхъ значеніяхъ

$$E,\ p,\ \alpha$$

для разныхъ силъ. Тогда уравненіе движенія массы m будетъ отличаться отъ (112) только тѣмъ, что во второй части его будетъ входить не одна сила, а сумма всѣхъ силъ. Обозначая суммированіе знакомъ Σ получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt} + f.\ \frac{dx}{dx} + n^2x = \mathscr{E}{\cdot}\operatorname{Cos}(pt - \alpha)$$

гдѣ

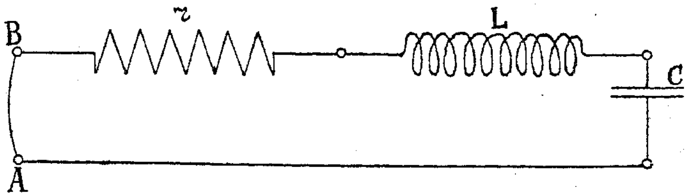
$$\mathscr{E} = \frac{E}{m}.$$

Это уравненіе интегрируется подобнымъ же образомъ какъ и прежнее (112).

307. *Примѣры насильственныхъ колебаній.* Случаи ихъ довольно часты въ Акустикѣ; сюда относятся колебанія под-

ставокъ и опоръ музыкальныхъ инструментовъ, фортепіанной деки, резонаторныхъ ящиковъ и т. д.

Подъ тотъ же типъ подходятъ многія изъ явленій дѣйствія перемѣнныхъ токовъ. Возьмемъ напр. цѣпь (фиг. 217), въ кото-



Фиг. 217.

рую введены послѣдовательно значительное сопротивленіе r, приборъ съ большой самонидукціей L, и конденсаторъ емкости C. Пусть въ части цѣпи AB дѣйствуетъ перемѣнная электро-движушая сила вызывающая между A и B разность потенціаловъ которая измѣняется по закону

$$e = E.\ \mathrm{Sin}pt.$$

Въ цѣпи получится перемѣнный токъ, сила котораго x опредѣляется слѣдующимъ уравненіемъ:

$$L.\ \frac{d^2x}{dt^2} + r\ \frac{dx}{dt} + \frac{x}{C} = p.E.\mathrm{Cos}\ pt.$$

Оно вполнѣ согласуется съ разобраннымъ въ n° 303 и всѣ сдѣланныс тамъ выводы примѣняются и къ этому случаю дѣйствія перемѣннаго тока.

308. *Резонансъ* часто встрѣчается во многихъ явленіяхъ. Когда періодъ насильственныхъ колебаній или толчковъ. сообщаемыхъ внѣшней причиной, одинаковъ съ періодомъ свободныхъ, естественныхъ колебаній тѣла, то рядъ очень небольшихъ толчковъ можетъ сообщить тѣлу замѣтныя и даже значительныя колебанія. „Дыханіемъ—Галилей привелъ въ движеніе тяжелый маятникъ, тиканіемъ однихъ часовъ Эликотъ пустилъ въ ходъ другія, причемъ вторыя часы были отдѣлены стѣною отъ первыхъ“ говоритъ Тиндаль въ своей статьѣ „Духи и наука“. Явленіемъ резонанса пользуются дѣти, раскачивая качели, гибкія скамейки и т. п. Также поступаютъ при раскачиваніи колоколовъ.

309. Иногда въ мостахъ вслѣдствіе резонанса могутъ получиться такія значительныя колебанія, что онѣ становятся

опасными и даже могутъ повлечь за собою обрушеніе моста. Такое разрушеніе не разъ случалось съ цѣпными мостами старинной конструкціи, которые не имѣли достаточной жесткости; для нихъ періодъ свободныхъ колебаній довольно значительный, 1—2 секунды, и можетъ совпасть съ періодомъ ритмическихъ толчковъ, производимыхъ ногами людей, которые идутъ по мосту. При прохожденіи военнаго отряда, идущаго въ ногу, совпаденіе шаговъ многихъ людей, можетъ вызвать обрушеніе моста; поэтому обыкновенно требуютъ, чтобы солдаты не шли въ ногу при переходѣ по цѣпному мосту. Въ новыхъ постройкахъ совершенно отказались отъ такихъ недостаточно жесткихъ мостовъ. Современныя конструкціи висячихъ мостовъ всѣ имѣютъ гораздо большую жесткость чѣмъ старинные цѣпные мосты, и этимъ устранена опасность обрушенія отъ накопленія колебаній.

310. Въ машинахъ, при движеніи ихъ производятся толчки, обыкновенно ритмическіе, и потому часто получаются явленія резонанса, опасныя колебанія, сильныя раскачиванія частей, если періодъ свободныхъ колебаній этихъ частей совпадаетъ съ періодомъ насильственныхъ толчковъ. Таковы толчки сообщаемые паровыми машинами при попеременномъ движеніи поршня взадъ и впередъ. Подобнымъ же образомъ можетъ дѣйствовать и перемѣнный электрическій токъ. „Однажды авторъ наблюдалъ замѣчательный случай альтернатора, который издавалъ непрерывный и пронзительный воющій звукъ. Причиной въ этомъ случаѣ было случайное совпаденіе между числомъ перемѣнъ тока и числомъ періодовъ вибраціи нѣкоторыхъ массивныхъ желѣзныхъ частей“ *).

311. Когда явленія резонанса въ машинахъ становятся замѣтными и дѣлаются неудобными и даже опасными для прочности, то ихъ устраняютъ тѣмъ, что измѣняютъ періодъ толчковъ, т. е. періодъ насильственныхъ колебаній. Если напр. эти толчки происходятъ отъ поперемѣннаго хода поршня машины, то нужно измѣнить скорость этого хода; этимъ уничтожается совпаденіе періодовъ свободныхъ и насильственныхъ колебаній, и резонансъ прекращается.

312. Поразительный случай резонанса представляютъ колебанія металлическаго корпуса морскихъ судовъ, вызываемыя толчками при ходѣ паровой машины судна. Корпусъ громаднаго парохола колеблется какъ камертонъ, образуя узлы и пучности; эти колебаніи иногда дѣлаются невыносимы для лицъ находя-

*) С. Томсонъ. Динамо-машины. Томъ II стр. 1015.

щихся на суднѣ. Такой непріятный резонансъ устраняютъ, измѣняя періодъ толчковъ, т. е. измѣняя число оборотовъ, дѣлаемыхъ паровой машиной въ минуту.

Мы видѣли выше, что при резонансѣ, между толчками силы и колебаніями тѣла получается разность фазъ ровно въ четверть періода. Это позволяетъ на опытѣ опредѣлить причину резонанса, если колебанія въ точности отмѣчаются на особыхъ записывающихъ приборахъ и тамъ же отмѣчаются одновременныя положенія поршней машинъ. Этимъ путемъ иногда удавалось установить, что, изъ числа двухъ паровыхъ машинъ, движущихъ пароходъ, одна оказываетъ преимущественное вліяніе на вибрацію судна. Иногда, въ случаѣ уравновѣшенныхъ машинъ, такимъ путемъ удавалось доказать, что движенія ихъ поршней не могутъ быть причиною вибрацій судна, и что причину нужно искать въ другихъ обстоятельствахъ, напр. въ неправильностяхъ гребнаго винта, лопасти котораго иногда отличаются одна отъ другой и т. п. *).

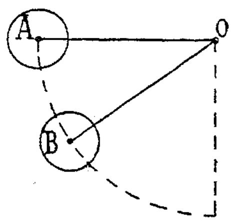
Такую же разность фазъ нужно имѣть въ виду при уравновѣшеніи вращающихся частей машинъ тѣми пріемами, о которыхъ мы говорили въ n° 84.

313. ***Шестой типъ. Колебанія маятника при значительной величинѣ размаховъ его.*** Знаніе законовъ движенія въ этомъ случаѣ позволяетъ примѣнять маятникъ какъ точный приборъ для измѣренія малыхъ промежутковъ времени: Такое примѣненіе сдѣлано въ электробалистическомъ приборѣ Навьé, служащемъ для измѣренія скорости, которую имѣетъ артиллерійскій снарядъ по вылетѣ его изъ орудія. Передъ орудіемъ ставятся два шита изъ проволокъ на нѣкоторомъ разстояніи одинъ отъ другаго; летящій снарядъ разрываетъ эти щиты одинъ послѣ другаго, и если будетъ найдено время проходящее между этими двумя разрывами, то скорость снаряда опредѣлится, такъ какъ разстояніе между щитами извѣстно. Для измѣренія этого времени и служитъ электробалистическій маятникъ. Первоначальное положеніе его OA (фиг. 218) горизонтальное и онъ удерживается въ этомъ положеніи электромагнитомъ; при разрывѣ перваго щита, размыкается токъ этого электромагнита, и маятникъ начинаетъ двигаться. При разрывѣ втораго щита, происходитъ замыканіе тока, и маятникъ останавливается въ

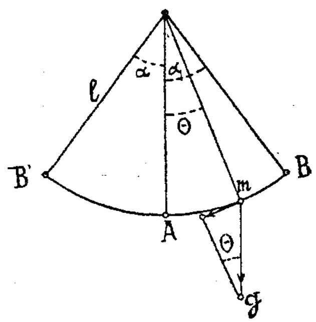
*) См. статью Шлика: Vibrationserscheinungen der Dämpfer въ Zeitsch. Vereines deutscher Ingenieure. 1905 года, Band 49. s. 1501.

какомъ нибудь положенiи B. Зная законы движенiя маятника, можемъ опредѣлить время движенiя изъ A въ B, т. е. время между моментами разрыва двухъ щитовъ.

314. Мы уже знаемъ, (см. n° 65) что всегда можно найти такой простой маятникъ, который будетъ качаться вполнѣ со-



Фиг. 218.



Фиг. 219.

гласно съ движенiемъ сложнаго маятника. Поэтому можемъ ограничиться изученiемъ движенiя простаго маятника. Пусть длина его l; качаясь онъ отклоняется вправо и влѣво отъ вертикали O A (фиг. 219) на уголъ α. Точка m представляетъ любое положенiе маятника; соотвѣтствующiй ему перемѣнный уголъ отклоненiя маятника отъ вертикали означимъ Θ. Въ этомъ положенiи проекцiя ускоренiя тяжести g на касательную будетъ

$$-g\sin\Theta.$$

Но таже проекцiя ускоренiя можетъ быть выражена иначе, пользуясь общими законами криволинейнаго движенiя точки. Ускоренiе выразимъ въ функцiи дуги Am, считаемой отъ точки A въ сторону увеличенiя угла Θ; длина этой дуги есть

$$l.\ \Theta;$$

ускоренiе будетъ вторая производная этой дуги по времени. Уравнивая между собою эти два выраженiея для ускоренiя по касательной, получимъ уравненiе движенiя

$$l.\frac{d^2\Theta}{dt^2}=-g.\sin\Theta.$$

Отсюда принимая обозначенiе

$$\frac{g}{l}=n^2,$$

получаемъ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+n^2 \operatorname{Sin} \theta=o \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Будемъ интегрировать это уравненіе; для этого умножимъ оба члена его на

$$\frac{d\Theta}{dt},$$

тогда интегралы обѣихъ членовъ легко находятся и получимъ:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2=n.^2 \operatorname{Cos}\Theta+C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

Чтобы найти произвольную постоянную C обратимся къ крайней точкѣ B; для нея имѣемъ:

$$\Theta=\alpha,$$

а скорость т. е.

$$\frac{d\Theta}{dt}$$

въ этой точкѣ равна нулю. Дѣлая подстановку въ (118) найдемъ

$$0=n.^2 \operatorname{Cos}\alpha+C$$

а вычитая это изъ (118) находимъ:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2=n^2 (\operatorname{Cos}\Theta-\operatorname{Cos}\alpha) \quad . \quad . \quad (119)$$

Это первый интегралъ нашего дифференціальнаго уравненія движенія (117). Не трудно видѣть, что это интегралъ живыхъ силъ для движенія изъ B въ m.

315. Для дальнѣйшаго интегрированія произведемъ съ урав. (119) слѣдующія выкладки: сначала извлеченъ квадратный корень:

$$\frac{d\Theta}{dt}=\sqrt{2n^2 (\operatorname{Cos}\Theta-\operatorname{Cos}\alpha)};$$

потомъ раздѣляемъ въ уравненіи перемѣнныя Θ и t:

$$\frac{d\Theta}{\sqrt{2(\operatorname{Cos}\Theta-\operatorname{Cos}\alpha)}}=n\,.\,dt \quad . \quad . \quad (120)$$

Время t будемъ считать отъ момента когда маятникъ находится въ среднемъ своемъ положеніи A; тогда уголъ

$$\Theta=O.$$

Слѣд. по интегрированіи (120) между предѣлами 0 и t найдемъ:

$$nt = \int_0^\Theta \frac{d\Theta}{\sqrt{2(\operatorname{Cos}\Theta - \operatorname{Cos}\alpha)}} \quad . \ . \ . \ . \ (121)$$

Замѣнимъ косинусы угловъ посредствомъ синусовъ половинныхъ угловъ, т. е.

$$\operatorname{Cos}\Theta = \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 \frac{\Theta}{2}}{2}$$

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Тогда интегралъ (121) приведется къ формѣ

$$nt = \int_0^\Theta \frac{d\Theta}{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\Theta}{2}}} \quad . \ . \ . \ . \ (122)$$

Теперь введемъ новую перемѣнную u, связанную съ Θ условіемъ

$$\operatorname{Sin}\frac{\Theta}{2} = u \, . \operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2},$$

и для краткости назовемъ

$$\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}$$

одной буквой k.

Имѣемъ

$$\operatorname{Sin}\frac{\Theta}{2} = u. k.$$

Для частнаго значенія

$$\Theta = O,$$

получаемъ

$$u = O,$$

а для

$$\Theta = \alpha$$

величина u обращается въ единицу.

Вводя новую перемѣнную u въ (122) получимъ

$$nt = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\ \ \sqrt{1-k^2u^2}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (123).$$

Полученный интегралъ содержитъ въ себѣ радикалъ изъ функціи 4-ой степени отъ u; слѣд. онъ относится къ разряду эллиптическихъ интеграловъ.

316. Не касаясь чисто математической стороны вопроса, замѣтимъ только, что можно найти съ извѣстнымъ приближеніемъ численныя значенія этого интеграла, для избранной величины u; такія вычисленія сдѣланы, такъ, что мы имѣемъ таблицы численныхъ значеній этого эллиптическаго интеграла для различныхъ значеній u, и при различныхъ величинахъ модуля k. Этими таблицами и пользуются, когда нужно имѣть величины эллиптическихъ интреграловъ, подобно тому какъ мы пользуемся таблицами логариѳмовъ, или таблицами тригонометрическихъ величинъ.

Съ помощію таблицъ эллиптическихъ интеграловъ, мы рѣшаемъ всѣ вопросы о движеніи маятника. Напр. если намъ данъ уголъ отклоненія Θ, то мы можемъ опредѣлить соотвѣтствующее ему время t. Для этого конечно долженъ быть заданъ наибольшій уголъ отклоненія маятника, т. е. α. Сначала вычисляемъ модуль k, равный

$$\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2},$$

а затѣмъ уже, взявъ таблицы для этого модуля, получаемъ для каждаго выбраннаго нами угла Θ, (или что все равно для каждаго значенія величины u, которая равна

$$\frac{1}{k}\cdot\left(\operatorname{Sin}\frac{\Theta}{2}\right),$$

величину интеграла, т. е. величину nt; раздѣляя ее на n, получаемъ время t.

Если желаемъ найти время полнаго размаха, то находимъ изъ таблицъ величину интеграла, отвѣчающую значенію

$$\Theta = \alpha,$$

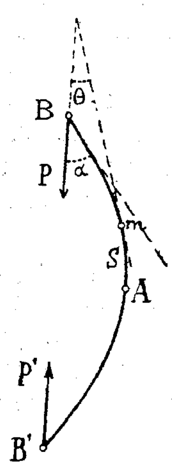
т. е. когда

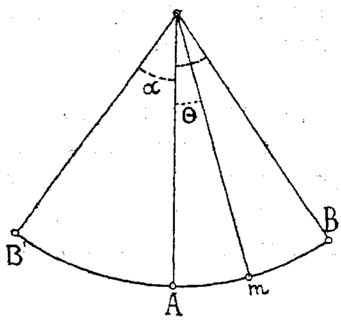
$$u = k.$$

Эта величина интеграла дастъ намъ значеніе nt для части размаха отъ средней точки A до крайней B; дѣля эту величину на n, и умножая на четыре, получимъ время полнаго (двойнаго) колебанія маятника.

317. Къ тому же типу мы приходимъ и при разборѣ другихъ вопросовъ Динамики, напр. при разсмотрѣніи движенія жироскопа.

318- *Примѣръ изъ Теоріи Упругости.* Уравненія того же типа, какъ только что выведенныя, встрѣчаются при разсмотрѣніи одного вопроса изъ Теоріи Упругости, а именно при разсмотрѣніи формы, которую приметъ упругая проволока, при дѣйствіи на нее двухъ силъ P, P′, приложенныхъ къ концамъ проволоки (фиг. 220). Кривая изгиба будетъ состоять изъ двухъ симметричныхъ половинъ AB и AB′; среднюю точку ея A примемъ за начало, отъ котоваго будемъ отсчитывать длину s дуги этой кривой. Длина дуги s принимается за независимую перемѣнную, и форма кривой опредѣляется, выводя зависимость s отъ того угла Θ, который образуетъ касательная въ любой точкѣ m нашей кривой, съ линіей силъ P. Частное значеніе угла Θ, получающееся для конца проволоки, назовемъ α.





Фиг. 220.

Для опредѣленія изгиба нужно имѣть мѣру гибкости проволоки; такой мѣрой служитъ произведеніе коеффиціентъ упругости матеріала, изъ котораго сдѣлана проволока (E), на моментъ инерціи поперечнаго сѣченія проволоки (I). Частное

$$\frac{P}{EI}$$

обозначимъ одной буквой n^2. Уравненіе упругаго равновѣсія между внѣшней силой P, и внутреними упругими силами, которыя развиваются при изгибѣ, получается слѣдующее *):

$$\frac{d^2\Theta}{ds^2} + n^2.\mathrm{Sin}\,\Theta = 0.$$

*) Мы его приводимъ безъ доказательства; выводъ желающіе найдутъ въ большинствѣ сочиненій по Теоріи Упругости и Сопротивленію Матеріаловъ.

Сравнивая его съ уравненіемъ (117) качаній маятника, видимъ замѣчательное сходство между ними.

Для лучшаго выясненія этого сходства, на фиг. 220 нарисованы рядомъ маятникъ и изогнутая пружина; соотвѣтствующія въ этихъ двухъ вопросахъ точки и величины обозначены одинаковыми буквами; A—означаетъ среднюю точку, B и B′—крайніе точки. Для маятника Θ есть уголъ отклоненія его нити отъ вертикали, а для проволоки Θ означаетъ уголъ отклоненія касательной отъ линіи силъ P, P′. Въ вопросѣ о маятникѣ входитъ время t, считаемое отъ момента перехода черезъ среднюю точку A. Для проволоки вмѣсто того имѣемъ длину ея s, считаемую отъ средней точки A.

319. И такъ оказывается полное соотвѣтствіе этихъ двухъ явленій; одно можетъ быть принято за модель, за образецъ для другаго. Полученный нами для маятника интегралъ (123) непосредственно примѣняется къ проволокѣ, и мы получаемъ:

$$ns = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-k^2u^2}}$$

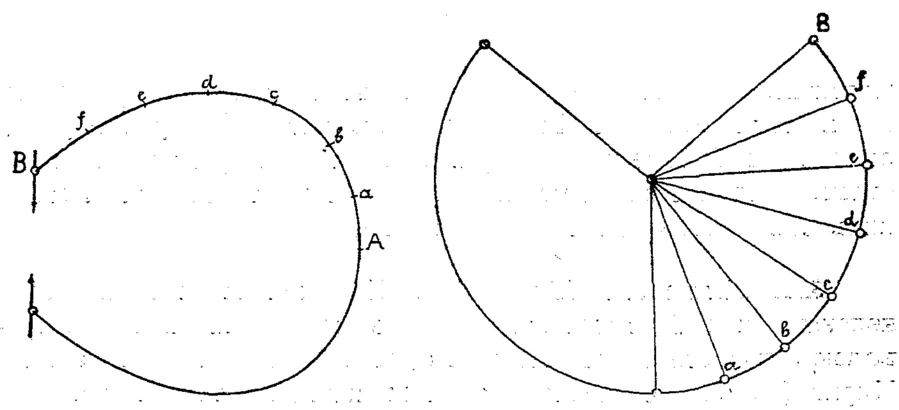
гдѣ по прежнему модуль k означаетъ величину

$$\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2},$$

а перемѣнная u связана съ угломъ Θ зависимостью

$$\mathrm{Sin}\,\frac{\Theta}{2} = ku.$$

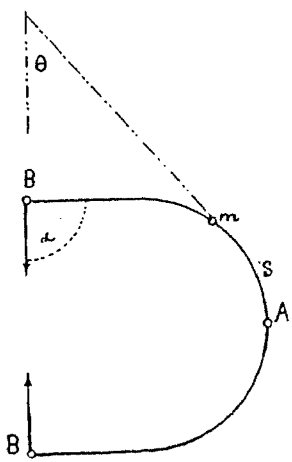
Такая аналогія между двумя явленіями разнаго рода очень поучительна и полезна для выясненія ихъ. Мы можемъ воспольм-

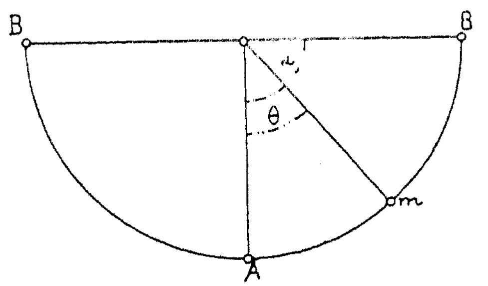


Фиг. 221.

зоваться проволокой и помощію ея представить картину качаній маятника; для этого нужно преварительно раздѣлить проволоку по ея длинѣ на равныя части и затѣмъ согнуть такъ, чтобы получить крайній уголъ α равный наибольшему углу отклоненія маятника (фиг. 221). Направленія касательныхъ въ точкахъ дѣленія A, a, b, c, d, e, f, g, B будутъ показывать направленія нити маятника, получающіяся по прошествіи равныхъ промежутковъ времени.

320. *При различныхъ амплитудахъ* α получаются разные законы колебаній маятника, соотвѣтственно этому и формы изогнутой пружины перемѣняются, если получаемъ другіе углы α. Нѣсколько частныхъ случаевъ изображены на фиг. 222--226. На каждой изъ фигуръ нарисованы рядомъ колеблящійся маятникъ и изогнутая пружина, съ обозначеніемъ соотвѣтствующихъ точекъ одинаковыми буквами; при этомъ легко сопоставлять эти два явленія. Фиг. 222 относится къ случаю когда





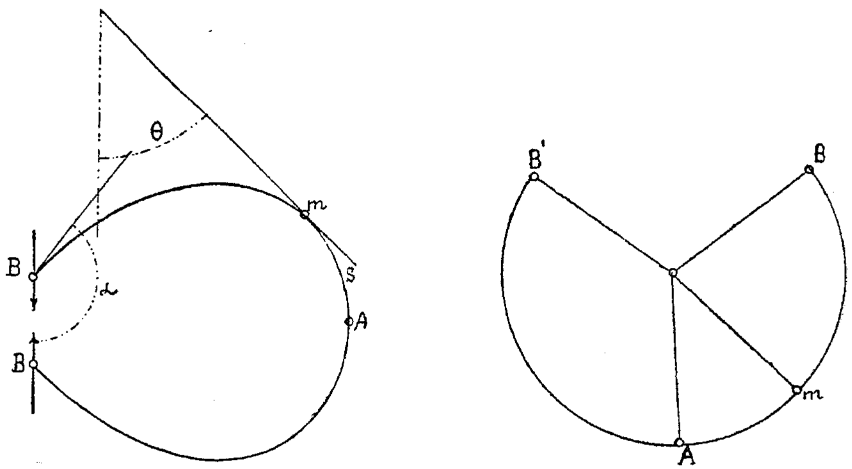
Фиг. 222.

маятникъ колеблется отклоняясь отъ вертикали на 90 градусовъ въ каждую сторону. На слѣдующихъ затѣмъ фигурахъ уголъ отклоненія больше 90 град., а въ послѣдней фигурѣ 226 представленъ случай когда уголъ отклоненія почти 180°, т. е. маятникъ описываетъ почти полный кругъ.

321. ***Аналогія Кирхгофа.*** Изложенная аналогія между явленіями качанія маятника и однимъ изъ случаевъ изгиба проволоки, представляетъ частный случай болѣе широкой аналогіи Кирхгофа; онъ показалъ, что для каждаго случая движенія твердаго тѣла, подпертаго въ одной точкѣ, имѣется анало-

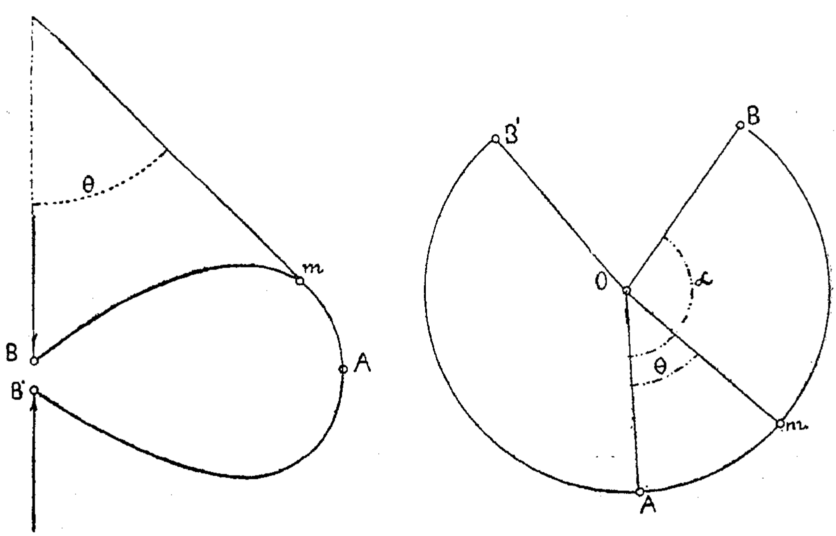
гія въ явленіяхъ деформаціи проволоки, на которую дѣйствуютъ изгибающія и крутящія силы и пары.

322. *Динамическія аналогіи и физическія гипотезы.* При разсмотрѣніи различныхъ физическихъ вопросовъ, относящихся къ явленіямъ свѣта, теплоты, электричества, магнитизма,



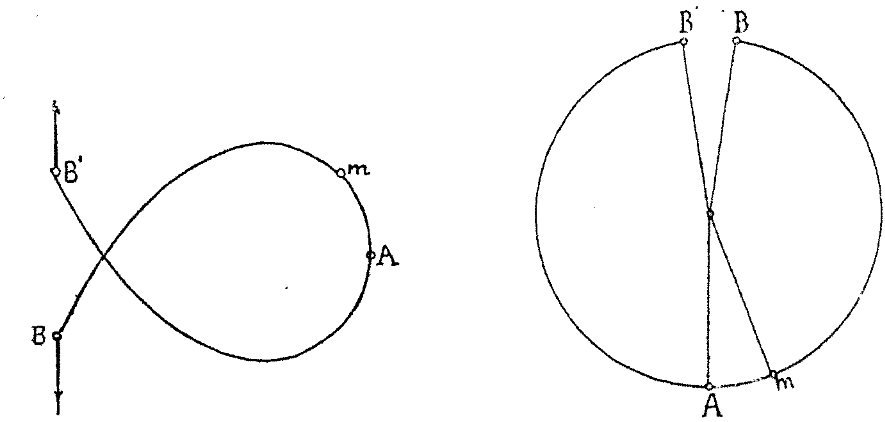
Фиг. 223.

часто получаемъ уравненія, по формѣ сходныя съ уравненіями динамики, т. е. съ уравненіями, изображающими движеніе ка-



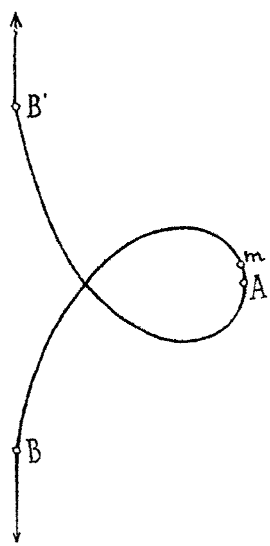
Фиг. 224.

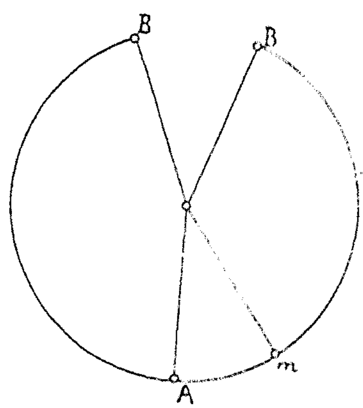
кого нибудь тѣла или системы тѣлъ. При этомъ естественно является мысль, что такая аналогія не случайна, и что эта



Фиг. 225.

динамическая модель представляетъ сущность механизма физическаго явленія. Таковъ источникъ физическихъ гипотезъ, объясняющихъ явленія свѣта, теплоты, электричества и т. д. невидимыми движеніями частицъ самаго тѣла или частицъ





Фиг. 226.

гипотетическихъ жидкостей, напр. свѣтоваго эфира.

Подобная динамическая аналогія можетъ оказаться очень плодотворной для физики. Избравши динамическую модель, мы изучаемъ ея движеніе, и полученными результатами пользуемся для предсказанія соотвѣтствующихъ физическихъ явленій. Затѣмъ нужно искать подтвердится ли такое предсказаніе опытомъ. Такимъ образомъ динамическая модель служитъ указателемъ, руководитъ работами, направляетъ опыты; это очень цѣнно, и потому динамическія гипотезы очень важны для науки.

323. Самая знаменитая динамическая модель, имѣвшая первостепенное значеніе въ наукѣ, и принесшая обильные плоды— есть атомистическая гипотеза. Мы подробно говорили о ней въ 14-ой бесѣдѣ. По этой гипотезѣ строеніе тѣлъ изображается атомами-точками; между атомами дѣйствуютъ притягательныя и отталкивательныя силы, зависящія только отъ разстояній между атомами. Всѣ явленія должны объясняться игрой такихъ атомныхъ взаимодѣйствій. Значеніе этой гипотезы особенно велико потому, что результатомъ ея получается Законъ Сохраненія Энергіи, т. е. тотъ законъ, на которой указываетъ вся совокупность экспериментальныхъ изслѣдованій. Эта гипотеза сыграла важную роль при установленіи Закона Сохраненія Энергіи. Она имѣла особое значеніе въ работахъ великихъ математиковъ Пуассона и Коши по Теоріи Упругости.

Но конечно теперь мы должны признать, что атомистическая гипотеза, блестящимъ образомъ объясняющая простыя явленія, оказывается недостаточной, когда приступаемъ къ болѣе сложнымъ явленіямъ. Прежде всего оказался недостаточнымъ знаменитый въ исторіи Теоріи Упругости выводъ той величины, которая называется Пуассоновымъ отношеніемъ, а затѣмъ найдены были и другія явленія, которыя не согласуются съ атомистической теоріей, въ ея простѣйшей формѣ. Эту модель нужно или отбросить вовсе, или во всякомъ случаѣ значительно усложнить ее. Въ первоначальной своей формѣ она не соотвѣтствуетъ сложности явленій природы.

324. Другая знаменитая гипотеза есть представленіе о Свѣтовомъ Эфирѣ, какъ о твердомъ тѣлѣ. Эта модель имѣетъ одно очень важное достоинство; въ твердомъ тѣлѣ возможны явленія сдвига, и вслѣдствіе этого въ немъ получаются поперечныя колебанія; а въ идеальной жидкости силы сдвига невозможны и въ ней нельзя вызвать поперечныя колебанія. Между тѣмъ явленія поляризаціи свѣта только тогда могутъ быть объяснены, когда мы примемъ, что свѣтовыя колебанія поперечныя, а не продольныя. Поэтому, начиная съ работъ Френеля, въ наукѣ по-

лучила значеніе гипотеза объ эфирѣ какъ твердомъ, упругомъ тѣлѣ *).

Явленія двойнаго лучепреломленія требуютъ, для своего объясненія, предположенія, что упругость эфира не одинакова по разнымъ направленіямъ. И въ этомъ отношеніи твердыя тѣла даютъ прекрасную аналогію; между ними многія анизотропны, т. е. имѣютъ различную упругость по разнымъ направленіямъ. Такимъ образомъ естественно приходимъ къ такой модели: эфиръ есть тѣло, владѣющее свойствами твердаго тѣла. Явленія, которыя должны произойти въ такой модели, предсказываются Теоріей Упругости.

Эта модель принесла значительную пользу Теоріи Свѣта, но ее нельзя считать истинной. Она слишкомъ сложна; она предсказываетъ явленія, для которыхъ не находимъ аналогіи въ явленіяхъ свѣта; напр. въ твердомъ тѣлѣ возможны продольныя колебанія, а изучая свѣтовыя явленія, мы не находимъ признаковъ такихъ колебаній. Затѣмъ „теорія анизотропнаго твердаго тѣла, съ его двадцать одной упругой постоянной, представляется слишкомъ сложной для оптическаго двойнаго лучепреломленія, которое имѣетъ гораздо болѣе простой характеръ“ **).

325. Нѣкоторыя явленія постояннаго электрическаго тока аналогичны съ теченіемъ жидкости; поэтому приходимъ къ гидравлической гипотезѣ. Моделью служитъ теченіе жидкости въ трубѣ, при большомъ сопротивленіи отъ тренія. Въ этой аналогіи напоръ жидкости соотвѣтствуетъ разности электрическихъ потенціаловъ; количество жидкости, протекающей въ единицу времени, отвѣчаетъ силѣ тока; треніе въ трубкѣ—соотвѣтствуетъ сопротивленію проводника.

Такая модель часто примѣняется для объясненія простыхъ явленій электричества; самый терминъ „электрическій токъ“ обязанъ своимъ происхожденіемъ этой гипотезѣ. Но она становится недостаточной, когда переходимъ къ болѣе сложнымъ явленіямъ, напр. вступаемъ въ область перемѣннаго тока. Тогда ее нужно замѣнить другой, болѣе сложной, моделью.

326. ***Реальность или фиктивность динамическихъ моделей.*** Въ прежнее время на динамическія модели, приду-

---

*) Подробный разборъ этой гипотезы сдѣланъ лордомъ Кельвиномъ на лекціяхъ, читанныхъ имъ въ 1884 году въ Балтиморѣ. См. Lord Kelvin. Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light. London 1904.

**) Rayleigh, въ Encyclopaedia Britannica статья Wave Theory of Light.

манныя для объясненія физическихъ явленій, смотрѣли какъ на реальный образъ того, что происходитъ въ дѣйствительности. Такъ, свѣтовой эфиръ считался дѣйствительно существующимъ тѣломъ, реальнымъ носителемъ явленій свѣта.

Теперь иначе смотрятъ на гипотезы; динамической модели придаютъ значеніе простой аналогіи, которая полезна, такъ какъ наводитъ на мысли и предположенія о возможныхъ явленіяхъ; такія внушенія, доставляемыя гипотезой, нужно провѣрять на опытѣ; этимъ путемъ могутъ получиться важныя открытія. Но теперь не придаютъ гипотезѣ значеніе абсолютной истины, и несклонны думать, чтобы динамическая модель представляла реальный образъ, точную картину физическаго явленія.

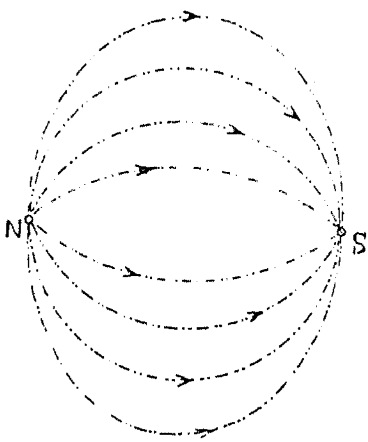
Противъ реальности динамическихъ моделей сильно говорятъ два слѣдующихъ соображенія. Во первыхъ постоянно оказывается, что придуманная гипотеза оказывается недостаточной, требуетъ дополненія, измѣненія, усложненія. Нѣтъ гарантій, обезпечивающихъ намъ, что гипотеза, которая теперь представляется совершенной, не окажется впослѣдствіи недостаточной, безсильной объяснить новыя явленія, которыя можетъ быть будутъ со временемъ открыты. Развитіе науки постоянно указываетъ, что явленія природы гораздо болѣе сложны, чѣмъ это представлялось первоначально, и трудно ожидать, чтобы можно было придумать схему, обнимающую всѣ возможныя усложненія. А гипотеза, угадавшая дѣйствительный внутренній механизмъ явленій, непремѣнно должна удовлетворять этому требованію.

Во вторыхъ реальность динамической модели мало вѣроятна уже потому, что аналогіи встрѣчаются часто и въ большомъ числѣ. Если для какого нибудь явленія можно придумать динамическую модель, то это не будетъ единственная возможная аналогія. Можно будетъ сочинить еще много динамическихъ моделей, удовлетворяющихъ той же аналогіи. Которая же изъ нихъ вѣрна? Всѣ онѣ приводятъ къ одинаковымъ уравненіямъ.

Вслѣдствіе этого на динамическія модели въ настоящее время не смотрятъ какъ на реальности, какъ на истинный образъ механизма, имѣющаго мѣсто въ природѣ. Это только схемы, позволяющія въ одной простой картинѣ заключить и описать большое число явленій. Но приходится мириться съ тѣмъ, что эти схемы современемъ, съ открытіемъ новыхъ фактовъ, окажутся недостаточными; ихъ придется дополнять, а иногда и вовсе отбрасывать и замѣнять совершенно другими.

При такой точкѣ зрѣнія выборъ динамической модели до извѣстной степени произволенъ. Характеръ модели, т. е. видъ аналогіи, подбирается каждымъ сообразно со складомъ его ума. Для большинства наиболѣе простыми представляются чисто механическія явленія, простое движеніе. Поэтому обыкновенно для объясненія физическихъ явленій придумываютъ чисто механическія модели, напр. гидравлическую аналогію для электрическаго тока, упругую аналогію для свѣтоваго эфира. Генераторы постояннаго тока сравниваютъ съ центробѣжными помпами, а генераторы перемѣннаго тока съ поршневыми насосами.

Но такое направленіе вовсе не есть общее правило; тѣ, кто много имѣлъ дѣла съ электротехникой и сроднился съ нею, поступаютъ обратно; они примѣняютъ электрическія схемы для иллюстраціи чисто механическихъ явленій; много примѣровъ этого можно видѣть въ учебникахъ по электротехникѣ профессора Арнольда. Изъ числа физическихъ гипотезъ можно указать на электромагнитную теорію свѣта, которая не имѣетъ чисто механическій характеръ.



Фиг. 227.

Иногда примѣняютъ аналогіи, которыя несомнѣнно не отвѣчаютъ и не могутъ отвѣчать дѣйствительности. Сюда относится столь распространенное понятіе о теченіи силы, о потокѣ силъ въ динамическомъ полѣ. Мэксвелль разсматриваетъ въ такомъ потокѣ источники (sources), откуда исходитъ потокъ, и поглощающіе колодцы (sinks), гдѣ этотъ потокъ поглощается. Такъ если говоримъ о магнитномъ полѣ, то сѣверный полюсъ N (фиг. 227) есть источникъ, а южный полюсъ S—поглощающій колодезь.

Распредѣленіе силъ въ динамическомъ полѣ во многихъ отношеніяхъ аналогично растеканію жидкости, выходящей изъ нѣкотораго источника. Поэтому такая аналогія, фиктивное представленіе о потокѣ силъ, объ источникахъ силы и т. д. очень полезна, наглядна и даетъ много указаній. Конечно ее нужно примѣнять только въ томъ случаѣ, когда силы слѣдуютъ закону обратной пропорціональности квадратамъ разстояній. Только въ этомъ случаѣ динамическое поле аналогично потоку растекающейся жидкости. Для силъ, измѣняющихся по иному закону, эта гидродинамическая аналогія не имѣетъ значенія.

328. ***Подробности, детали механическихъ гипотезъ.*** Иногда, составляя такую гипотезу, вырабатываютъ ее со всѣми подробностями, въ точности опредѣляя весь механизмъ той модели, которая представляетъ физическое явленіе. Примѣромъ можетъ служить кинетическая теорія газовъ. Въ другихъ случаяхъ не вводятъ подробности и не разрабатываютъ детально гипотетическій механизмъ. Ограничиваются лишь общимъ указаніемъ на аналогію законовъ физическаго явленія съ законами динамики; напр. замѣчая, что при исчезаніи живой силы появляется теплота, устанавливаютъ лишь аналогію теплоты и живой силы, не дѣлая предположеній относительно того, въ чемъ именно состоитъ то невидимое движеніе, которое называется теплотой.

Во многихъ случаяхъ достаточно указанія на общій механическій характеръ явленія, и нѣтъ надобности придумывать подробности механизма. Динамическая аналогія здѣсь сводится къ сходству уравненій, изображающихъ физическія явленія, съ уравненіями Динамики. Здѣсь моделью служатъ эти послѣднія уравненія.

Наиболѣе удобной для этого формой, оказываются такъ называемыя Лагранжевы уравненія второго рода. Со времени работъ Мэксвелля въ Физикѣ широко распространилось стремленіе подводить явленія подъ эту модель, которая поэтому получила особое значеніе *).

Но и съ чисто механической точки зрѣнія Лагранжевы уравненія второго рода представляютъ наиболѣе удобную форму для рѣшенія вопросовъ движенія, какъ только, покончивъ съ наиболѣе простыми задачами, мы намѣреваемся перейти къ болѣе сложнымъ вопросамъ.

Лица, желающія продолжить изученіе Динамики дальше предѣловъ, которыхъ мы придерживались въ нашихъ бесѣдахъ, должны начинать свои занятія со знакомства со второй Ланграножевой формой уравненій движеній.

---

*) О динамическихъ моделяхъ въ связи съ физическими гипотезами см. слѣд. книги:

Пуанкаре. Гипотеза и наука.

Duhem. L'évolution de la mécanique.