Замѣтка по вопросу о вліяніи температуры на упругія напряженія въ твердомъ тѣлѣ.

В. Л. Кирпичева.

I.

Въ этомъ вопросѣ имѣетъ основное значеніе слѣдующая задача:

при какомъ распредѣленіи температуры внутри тѣла нагрѣваніе не вызываетъ въ немъ никакихъ внутреннихъ напряженій?

Возьмемъ случай свободнаго изотропнаго твердаго тѣла, (не подпертаго и не закрѣпленнаго) и разберемъ нашу задачу общимъ образомъ.

Прямое рѣшеніе этой задачи слѣдующее: если напряженій нѣтъ, то каждый элементъ тѣла, имѣющій форму прямоугольнаго параллелопипеда, получитъ по тремъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ одинаковое относительное удлиненіе, пропорціональное температурѣ, и не сопровождающееся перекашиваніемъ (сдвигами). Слѣдовательно нужно только убѣдиться, что такое измѣненіе формы возможно; тогда соотвѣтствующее ему распредѣленіе температуры не вызоветъ внутреннихъ напряженій.

И такъ все приводится къ вопросу: возможно ли указанное измѣненіе формы, дозволяется ли оно связью частей твердаго тѣла, представляющаго *сплошное* тѣло. Это вопросъ чисто кинематическій; въ него не входятъ силы и условія ихъ равновѣсія.

Но конечно при рѣшеніи его можно пользоваться услугами Статики, которая иногда облегчаетъ изслѣдованіе. Такъ напримѣръ, положимъ намъ извѣстенъ нѣкоторый случай дѣйствія внѣшнихъ нагрузокъ, при которомъ ни одинъ изъ элементовъ тѣла не перекашивается, и для каждаго элемента удлиненія его, по тремъ перпендикулярнымъ направленіямъ, одинаковы. Знаніе такого случая дѣйствія силъ указываетъ намъ, что подобное измѣненіе формы возможно. Изъ существованія его заключаемъ, что эта деформація не противурѣчитъ связи отдѣльныхъ частей тѣла, не разстраиваетъ эту связь. Поэтому мы можемъ воспользоваться этимъ случаемъ и для вопроса о температурѣ. Пусть температура въ тѣлѣ измѣняется по тому же закону, которому слѣдуютъ удлиненія разныхъ элементовъ тѣла, при указанномъ случаѣ дѣйствія силъ. Вообразимъ, что каждый элементъ получитъ то удлиненіе, которое отвѣчаетъ его температурѣ. Такая деформація возможна; притомъ она не вызоветъ никакихъ напряженій, такъ какъ каждый элементъ получилъ свое естественное измѣненіе длины, отвѣчающее его нагрѣванію. И такъ имѣемъ случай распредѣленія температуръ, при которомъ не возбуждаются внутреннія напряженія.

Замѣтимъ, что для пользованія этимъ пріемомъ нужно брать точныя рѣшенія вопросовъ объ измѣненіи формы тѣла подъ дѣйствіемъ нагрузокъ. Образцомъ такихъ точныхъ рѣшеній, удовлетворяющихъ всѣмъ условіямъ Теоріи Упругости, служитъ извѣстное рѣшеніе Санъ Венановой задачи. Если же будемъ брать столь распространенныя въ Строительной Механикѣ приблизительныя рѣшенія, то можемъ получить невѣрныя указанія относительно искомаго закона распредѣленія температуръ, не вызывающихъ напряженій.

II.

Повторяемъ, задача, поставленная нами въ началѣ этой замѣтки, имѣетъ чисто кинематическій характеръ. Рѣшеніе ея зависитъ отъ того, какія деформаціи возможны въ упругомъ тѣлѣ. Мы должны задать деформацію, состоящую для каждаго элемента изъ трехъ одинаковыхъ удлиненій по тремъ перпендикулярнымъ направленіямъ, при отсутствіи сдвиговъ; затѣмъ нужно разобрать возможна ли эта деформація. Если возможна, то соотвѣтствующее распредѣленіе температуры не вызоветъ напряженій.

Какъ извѣстно, деформаціи элементовъ тѣла, т. е. ихъ удлиненія и сдвиги, не могутъ быть задаваемы вполнѣ произвольно, а должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ. Такое ограниченіе вызывается взаимною связью различныхъ элементовъ. Дѣйствительно, деформація каждаго элемента опредѣляется шестью величинами, именно тремя удлиненіями его

$$e, f, g$$

по направленіямъ координатныхъ осей x, y, z, и тремя сдвигами элемента

$$a, b, c$$

въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ. Эти *шесть* величинъ не вполнѣ независимы другъ отъ друга. Онѣ опредѣляются *тремя* перемѣщеніями точекъ тѣла по координатнымъ осямъ

$$u, v, w$$

и связаны съ ними слѣдующими извѣстными зависимостями:

$$e = \frac{du}{dx};\ f = \frac{dv}{dy};\ g = \frac{dw}{dz}$$

$$a = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}$$

$$b = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$$

$$c = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}$$

Между тѣмъ три перемѣщенія

$$u, v, w$$

должны быть непрерывными функціями координатъ. Слѣд. связанныя съ ними шесть деформацій

$$e, f, g, a, b, c$$

не могутъ быть заданы произвольно, а должны подчиняться нѣкоторымъ ограничивающимъ условіямъ.

Такія условныя уравненія, ограничивающія деформаціи, были выведены Санъ Венаномъ, и приводятся къ слѣдующей системѣ [1]):

$$\frac{d^2e}{dy^2}+\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^2c}{dx\,.\,dy}$$

$$\frac{d^2e}{dz^2}+\frac{d^2g}{dx^2}=\frac{d^2b}{dz\,.\,dx}$$

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\frac{d^2g}{dy^2}=\frac{d^2a}{dy\,.\,dz}$$

$$2\,.\,\frac{d^2e}{dy\,.\,dz}+\frac{d^2a}{dx^2}=\frac{d^2b}{dx\,.\,dy}+\frac{d^2c}{dz\,.\,dx}$$

$$2\,.\,\frac{d^2f}{dz\,.\,dx}+\frac{d^2b}{dy^2}=\frac{d^2c}{dy\,.\,dz}+\frac{d^2a}{dx\,.\,dy}$$

$$2\,.\,\frac{d^2g}{dx\,.\,dy}+\frac{d^2c}{dz^2}=\frac{d^2a}{dz\,.\,dx}+\frac{d^2b}{dy\,.\,dz}$$

Такова совокупность необходимыхъ и достаточныхъ условій, которымъ должны удовлетворять деформаціи твердаго тѣла.

Переходя къ нашей задачѣ относительно распредѣленія температуры не вызывающаго напряженій, имѣемъ для этого частнаго случая условія:

a) вездѣ отсутствуютъ сдвиги, т. е. деформаціи

$$a,\ b,\ c$$

равны нулю.

b) Удлиненія элемента по тремъ направленіямъ, т. е

$$e,\ f,\ g$$

равны между собою.

---

[1]) См. Navier et S. Venant. Résumé des leçons etc. Appendice III, 32. Также Love. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. V. I p. 121.

При такихъ условіяхъ общія уравненія Санъ Венана получаютъ слѣдующую частную форму:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2e}{dx^2}+\frac{d^2e}{dy^2}=0\\ \frac{d^2e}{dz^2}+\frac{d^2e}{dx^2}=0\\ \frac{d^2e}{dy^2}+\frac{d^2e}{dz^2}=0\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{A})$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2e}{dy\,.\,dz}=0\\ \frac{d^2e}{dx\,.\,dz}=0\\ \frac{d^2e}{dx\,.\,dy}=0\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{B})$$

Изъ уравненій *(B)* выводимъ:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{de}{dx}\right)=0 \qquad \frac{d}{dy}\left(\frac{de}{dx}\right)=0;$$

т. е. оказывается, что

$$\frac{de}{dx}$$

не зависитъ отъ координатъ y и z. Изъ тѣхъ же уравненій *(B)* получимъ, что

$$\frac{de}{dy}$$

не зависитъ отъ z, x; и наконецъ, что

$$\frac{de}{dz}$$

не зависитъ отъ координатъ x, y.

Совокупность этихъ выводовъ указываетъ, что удлиненіе e есть сумма трехъ отдѣльныхъ функцій, изъ которыхъ каждая зависитъ только отъ одной координаты. Т. е.

$$e = F(x) + F_1(y) + F_2(z).$$

Чтобы опредѣлить видъ этихъ функцій, обратимся къ уравненіямъ (A). Изъ нихъ имѣемъ:

$$\frac{d^2e}{dx^2} = -\frac{d^2e}{dy^2} = -\frac{d^2e}{dz^2} = \frac{d^2e}{dy^2}$$

Такія условія могутъ быть выполнены только въ томъ случаѣ, если всѣ эти вторыя производныя равны нулю. Отсюда заключаемъ, что функціи

$$F(x),\ F_1(y),\ F_2(z),$$

которыя входятъ въ выраженіе для e, непремѣнно линейныя. А такъ какъ температура должна быть пропорціональна удлиненію e, то окончательно получаемъ слѣдующій общій отвѣтъ на задачу, составляющую предметъ нашей замѣтки:

Необходимое и достаточное условіе, которому должно удовлетворять распредѣленіе температуры, не вызывающее никакихъ внутреннихъ напряженій въ свободномъ изотропномъ упругомъ тѣлѣ, заключается въ слѣдующемъ:

Температура въ разныхъ точкахъ тѣла должна быть линейная функція Декартовыхъ координатъ этихъ точекъ.

Изъ числа многочисленныхъ частныхъ случаевъ этого общаго вывода укажемъ на слѣдующіе два, относящіеся къ прямымъ призматическимъ брускамъ.

a) Температура по длинѣ бруска (ось x) не измѣняется. Въ поперечномъ сѣченіи (оси z и y) температура измѣняется по закону:

$$t = a + by + cz.$$

Въ этомъ случаѣ поперечныя сѣченія бруска сохраняютъ свою плоскую форму. Ось бруска искривляется по дугѣ круга.

Этотъ случай разсматривается между прочимъ Мюллеромъ Бреслау въ его извѣстной книгѣ о новыхъ методахъ Строительной Механики.

b) Температура измѣняется по длинѣ бруска по закону

$$t = a + bx;$$

но въ каждомъ поперечномъ сѣченіи температура постоянная.

Въ этомъ случаѣ ось бруска остается прямой, но поперечныя сѣченія его искривляются (выпучиваются въ сторону возрастанія температуры). Кромѣ того производящія призматическаго бруска также искривляются. При совокупности искривленія производящихъ и выпучиванія поперечныхъ сѣченій—получается полное отсутствіе сдвиговъ.

Иногда при разборѣ частныхъ вопросовъ Строительной Механики получали результаты противурѣчащіе нашей общей теоремѣ. Но такое несогласіе происходитъ только потому, что вопросъ разбирается неправильно, напр. берутъ приблизительную теорію изгиба и т. п.

Доказательство теоремы Мориса Леви.

В. Л. Кирпичева.

М. Леви нашелъ для случая плоской деформаціи [1]) изотропнаго упругаго тѣла слѣдующую замѣчательную теорему:

При данныхъ внѣшнихъ силахъ распредѣленіе напряженій внутри тѣла вполнѣ опредѣляется фигурой и размѣрами тѣла и не зависитъ отъ его упругихъ свойствъ.

Другими словами распредѣленіе напряженій внутри тѣла не зависитъ отъ матеріала, изъ котораго состоитъ это тѣло, или что все равно не зависитъ отъ численныхъ величинъ упругихъ постоянныхъ этого матеріала. Эти постоянныя для изотропныхъ тѣлъ приводятся къ двумъ: модулю Юнга и Пуассонову отношенію; каковы бы ни были ихъ величины, распредѣленіе и величины внутреннихъ упругихъ силъ будутъ одинаковы, если внѣшнія силы однѣ и тѣ же [2]).

Частными примѣрами, иллюстрирующими теорему М. Леви, могутъ служить слѣдующіе случаи:

a) Сопротивленіе цилиндровъ внутреннему и наружному давленію; оно опредѣляется извѣстной формулой Ламе.

b) Сопротивленіе цилиндрическихъ катковъ давленію, которое приложено по производящимъ цилиндра.

---

[1]) Т. е. для случая, когда во всѣхъ плоскостяхъ, параллельныхъ одной опредѣленной плоскости, происходятъ одинаковыя явленія. Въ такихъ случаяхъ достаточно разсматривать одну изъ этихъ плоскостей, и мы будемъ имѣть дѣло только съ двумя координатами, лежащими въ означенной плоскости, а не съ тремя, какъ въ общемъ случаѣ.

[2]) См. статью Mesnager въ Annales des Ponts et Chaussées 1901. 4-e trimestre p. 129.

c) Распредѣленіе внутреннихъ силъ въ упругой почвѣ, на которую передается нормальное давленіе, приложенное по прямой линіи. Это извѣстный случай, разсмотрѣнный теоретически Буссинé, выводы котораго провѣрены Кэрасъ Вильсономъ помощію оптической методы.

d) Дѣйствіе центробѣжной силы на вращающійся дискъ, сплошной или съ цилиндрической дырой по серединѣ.

При рѣшеніи этихъ вопросовъ нѣкоторые авторы дѣлали для простоты допущеніе, что продольное растяженіе свободнаго бруска не сопровождается поперечнымъ сжатіемъ, и несмотря на неправильность такого допущенія, противурѣчащаго свойствамъ упругихъ тѣлъ, все таки получали вѣрные окончательные результаты, относительно распредѣленія упругихъ силъ. Это становится вполнѣ понятнымъ на основаніи теоремы Леви. Такъ какъ распредѣленіе внутреннихъ силъ не зависитъ отъ величинъ упругихъ постоянныхъ матеріала, то оно будетъ одно и тоже при всякой величинѣ Пуассонова отношенія. А потому оно не измѣнится и для случая, когда это отношеніе равно нулю, т. е. когда растяженіе бруска, имѣющаго свободную боковую поверхность, не сопровождается поперечнымъ сжатіемъ.

Но конечно предположеніе, что Пуассоново отношеніе равно нулю, даетъ невѣрныя величины *удлиненій и сжатій* внутри тѣла. Оно дастъ невѣрные результаты и для *упругихъ силъ*, если его примѣнять къ случаю *не* плоской деформаціи, для которой теорема Леви не имѣетъ мѣста [1]).

Теорема Леви имѣетъ особое значеніе для экспериментальной провѣрки выводовъ Теоріи Упругости и вообще для экспериментальной методы изслѣдованія упругихъ явленій. На основаніи ея если мы сдѣлали такую провѣрку для одного какого-нибудь матеріала, то можемъ быть увѣрены, что это справедливо и для всякаго другого изотропнаго упругаго матеріала. Въ случаяхъ, когда не имѣется теоретическаго рѣшенія

[1]) Обычная приблизительная теорія изгиба даетъ, что величины внутреннихъ силъ (растягивающихъ и срѣзающихъ), независятъ отъ упругихъ постоянныхъ. Этотъ результатъ есть слѣдствіе допущенія, что при изгибѣ имѣемъ дѣло съ плоской деформаціей. Допускается, что во всѣхъ сѣченіяхъ изгибаемаго бруска, параллельныхъ плоскости изгиба, происходятъ одинаковыя явленія. Точная теорія Санъ Венана, не дѣлающая такого допущенія, приводитъ для внутреннихъ силъ къ формуламъ, въ которыя входитъ Пуассоново отношеніе.

вопроса о распредѣленіи упругихъ силъ, можно найти это распредѣленіе путемъ опыта; найденное для одного матеріала—примѣнимо и для всѣхъ другихъ. Распредѣленіе упругихъ силъ легко находится опытомъ для прозрачныхъ тѣлъ (стекла), помощію извѣстной оптической методы, ведущей свое начало отъ Вертгейма и Клеркъ-Мексвелля. Вслѣдствіе теоремы М. Леви, эта метода пріобрѣтаетъ особое практическое значеніе. То что будетъ найдено для стекла буквально повторится и въ желѣзѣ и стали (допуская, что эти матеріалы изотропны). Такимъ образомъ оптическая метода даетъ не только общія указанія на характеръ упругихъ явленій, но и детальные численные результаты, получаемые этой методой, могутъ примѣняться къ металлическимъ тѣламъ, могутъ служить для повѣрки прочности нашихъ сооруженій.

Такое значеніе теоремы Леви побудило меня пріискать возможно простое доказательство ея, которое я и предлагаю вниманію инженеровъ.

Разобьемъ наше тѣло на прямоугольные элементы сѣткой параллельной осямъ x и y. Измѣненіе формы любого элемента во всѣхъ случаяхъ плоской деформаціи вполнѣ описывается заданіемъ трехъ величинъ

удлиненія по оси x
удлиненія по оси y
сдвига, т. е. измѣненія угла между осями x и y.

Эти три деформаціи мы назовемъ буквами

$$e, f, g.$$

Три эти величины не могутъ считаться вполнѣ независимыми одна отъ другой, т. е. нельзя задать ихъ значенія совершенно произвольно въ видѣ трехъ какихъ-нибудь непрерывныхъ функцій отъ координатъ. Нужно вспомнить, что мы имѣемъ *сплошное* тѣло, которое должно остаться сплошнымъ и послѣ деформаціи. Этимъ устанавливается связь различныхъ элементовъ тѣла между собою, и отсюда вытекаетъ условіе, связывающее означенныя три величины e, f, g.

Для нахожденія условія связи замѣтимъ, что при деформаціи каждая частица тѣла получаетъ въ плоскости xy перемѣщеніе, которое можно опредѣлить двумя его слагающими

$$u, v$$

по направленію осей x, y. Наши три деформаціи опредѣляются этими перемѣщеніями, а именно слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{du}{dx} \\ f &= \frac{dv}{dy} \\ g &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Такимъ образомъ *три* деформаціи

$$e,\ f,\ g$$

опредѣляются *двумя* перемѣщеніями; слѣдовательно между тремя деформаціями существуетъ нѣкоторая зависимость; онѣ не вполнѣ произвольны. Мы можемъ задать для перемѣщеній

$$u,\ v$$

любыя непрерывныя функціи координатъ. Но величины

$$e,\ f,\ g$$

получатся какъ результатъ этого заданія и будутъ связаны между собою нѣкоторымъ условнымъ уравненіемъ.

Это условіе связи легко находится въ общемъ видѣ изъ группы уравненій (1). Изъ нея сейчасъ получается зависимость

$$\frac{d^2e}{dy^2} + \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2g}{dx\,.\,dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \ (2)$$

Таково необходимое и достаточное условіе, связывающее наши деформаціи. Оно могло бы быть также получено, какъ частный выводъ для случая плоскаго измѣненія формы, изъ тѣхъ общихъ условій, связывающихъ деформаціи, которыя были найдены Санъ Венаномъ для любого измѣненія формы упругаго тѣла. Но я предпочелъ получить это условіе изъ непосредственнаго разсмотрѣнія нашего вопроса.

Уравненіе (2) послужитъ основаніемъ нашихъ выводовъ.

Введемъ въ него внутреннія упругія силы. Ихъ будетъ три: растягивающая по направленію x, растягивающая по направленію y, и сдвигающая сила. Означимъ ихъ буквами

$$P, \; Q, \; T.$$

Зависимость деформацій отъ силъ изображается извѣстными равенствами:

$$e = \frac{1}{E}(P - kQ)$$

$$f = \frac{1}{E}(Q - kP)$$

$$g = \frac{2(1+k)}{E} \, . \, T$$

Здѣсь E — коефф. упругости

k — Пуассоново отношеніе.

Пользуясь этими равенствами представимъ уравненіе (2) въ видѣ:

$$\frac{d^2P}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dx^2} - k \, . \left(\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2}\right) = 2(1+k) \, . \, \frac{d^2T}{dx \, . \, dy} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Затѣмъ возьмемъ уравненія равновѣсія элемента, стороны котораго параллельны осямъ x, y. Полагая, что вовсе нѣтъ такихъ внѣшнихъ силъ, которыя дѣйствуютъ на массы элементовъ, т. е. что всѣ нагрузки приводятся къ силамъ приложеннымъ на поверхности тѣла, получимъ эти уравненія въ формѣ:

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dT}{dy} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$\frac{dQ}{dy} + \frac{dT}{dx} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Дифференцируя (4) по x, а (5) по y, и складывая, найдемъ:

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}+2\,.\,\frac{d^2T}{dx\,.\,dy}=0$$

А подставляя этотъ результатъ въ (3) видимъ, что величина k сокращается, и окончательно наше условіе связи (2) получаетъ форму:

$$\frac{d^2P}{dy^2}+\frac{d^2Q}{dx^2}=2\,.\,\frac{d^2T}{dx\,.\,dy}\quad . \; . \; . \; . \;(6)$$

Въ него вовсе не входятъ упругія постоянныя E и k, и такое исключеніе ихъ и доказываетъ справедливость теоремы М. Леви.

На самомъ дѣлѣ положимъ, что мы для одного какого-нибудь матеріала знаемъ распредѣленіе упругихъ силъ, вызываемое нѣкоторой внѣшней нагрузкой. Это распредѣленіе должно удовлетворять уравненію (6). Теперь представимъ себѣ второе тѣло такой же формы и размѣровъ какъ первое, но сдѣланное изъ другого матеріала, владѣющаго другими упругими свойствами. Вообразимъ, что въ немъ получилась деформація, вызывающая такія же упругія силы какъ и въ первомъ тѣлѣ. Эта деформація возможна, потому что удовлетворяетъ уравненію (6), которое есть необходимое и достаточное условіе для плоскихъ деформацій сплошнаго упругаго тѣла. Затѣмъ внѣшнія силы, уравновѣшивающія эту деформацію, для второго тѣла конечно такія же, какъ и для перваго тѣла, потому что въ обоихъ случаяхъ нужно уравновѣсить одинаковыя внутреннія силы. И такъ и для второго тѣла имѣемъ такія же нагрузки и такія же внутреннія силы, какъ и для перваго. Въ этомъ и состоитъ доказываемая нами теорема, которая такимъ образомъ оказывается слѣдствіемъ условнаго уравненія (2), представляющагося необходимымъ по причинѣ взаимной связи элементовъ сплошного упругаго тѣла. Мнѣ кажется, что этимъ пріемомъ доказательства вполнѣ уясняется смыслъ теоремы.